Semaine 19 - Du 16 au 20 Février 2026

Variables aléatoires

Révision de la semaine 18

Une variable aléatoire
Définition de $X : \Omega \to E$ avec E quelconque. Cas des variables réelles.
Espace probabilisé induit $(X(\Omega), \mathbb{P}_X)$ par la variable aléatoire X.
Espérance, linéarité et croissance.

Exemples standards
Variable aléatoire suivant une loi uniforme $\mathcal{U}(X(\Omega))$, de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ ou binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Couple de variables aléatoires
Définition de la variable couple. Loi conjointe et lois marginales du couple.
Lien entre les lois. Indépendance des variables notée $X \perp\!\!\!\perp Y$.
Formule du produit pour des variables indépendantes.
Généralisation à n variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Variance, Covariance et écart-type
Définitions et calcul pour les lois classiques.
La covariance est bilinéaire, symétrique et positive.
Variance d'une somme de deux variables indépendantes.
Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Liste de Questions de cours :

a) Montrer que l'espérance est linéaire et croissante.
b) Soit $D_1 \sim D_2 \sim \mathcal{U}([\![1, 6]\!])$ deux V.A. indépendantes.
Calculer la loi et l'espérance de $X = \max(D_1, D_2)$.
c) Soit $D_1 \sim D_2 \sim \mathcal{U}([\![1, 6]\!])$ deux V.A. indépendantes.
Calculer la loi et l'espérance de $S = D_1 + D_2$.
d) Définir $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ puis calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
e) Définir $X \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ puis calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
f) Montrer que si $X_k \sim \mathcal{B}(p)$ sont mutuellement indépendantes alors $S = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Exercices d'Application du Cours

1. Soit $n \geq 1$. On considère le couple de variables aléatoires donné par $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Pour $0 \leq i, j \leq n, \mathbb{P}(X = i \cap Y = j) = a\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}$.
   (a) Trouver $a > 0$ afin de définir une loi conjointe unitaire.
   (b) Déterminer les lois marginales de X et de Y et en déduire que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$.
   (c) Montrer que $Cov(X, Y) = -\frac{n}{9}$. Que peut-on en déduire ?
2. On dispose de 100 dés à 6 faces dont 25 sont truqués de sorte que le 6 intervienne une fois sur deux. On choisit un des dés au hasard puis on le lance. On note X le résultat.
   (a) Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X = 6)$. En déduire la loi de X.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de X.
   (c) On lance un dé et on obtient 6. Quelle est la probabilité qu'il soit truqué ?

Devoir étoilé

Soit $X : \Omega \to X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ une variable aléatoire finie.
On définit sa fonction génératrice par $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}, M_X(t) \geq 0$.
2. Montrer que $M_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X^k) = M_X^{(k)}(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que pour tout coefficients $a, b \in \mathbb{R}$, on a $M_{aX+b}(t) = e^{bt}M_X(at)$.
5. Calculer M_X si $X \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ suit une loi uniforme.
6. Retrouver l'espérance et la variance d'une telle variable uniforme à l'aide du 3.
7. Calculer M_X si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ suit la loi binomiale.
8. Retrouver l'espérance et la variance d'une telle variable binomiale à l'aide du 3.
9. Montrer que pour n variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, ..., X_n$, si l'on définit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ alors $M_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} M_{X_k}(t)$.

Consignes :
— TD de Lundi : Préparer les exercices 7,8,9 et 14 du TD12.
— Pour les groupes qui n'ont pas de colle de Math cette semaine : Rédiger les exercices d'application du cours pour Lundi.
— Devoir étoilé pour Mardi.