

DM4 : Probabilités et Polynôme

à rendre le lundi 9 Mars 2026.

Exercice 1 : Des personnes se transmettent une information binaire. Chaque personne transforme l'information en son contraire avec une probabilité $q = 1 - p$ ou la transmet fidèlement avec une probabilité $p \in]0, 1[$. On note p_n la probabilité que la n -ième personne ait la bonne information avec pour convention $p_1 = 1$.

1. Calculer p_{n+1} en fonction de p_n .
2. Déterminer une expression explicite de p_n .
3. Calculer la limite de p_n lorsque $n \rightarrow \infty$. Commenter ce résultat.

Exercice 2 : On définit X une VA par $X(\Omega) = \llbracket -2, 2 \rrbracket$ et $\mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } k \text{ est pair} \\ \frac{1}{4} & \text{sinon} \end{cases}$.

On note également $Y = |X|$.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) puis la loi marginales de Y .
On présentera le résultat sous la forme d'un tableau.
2. Calculer la covariance du couple (X, Y) .
3. Les VA X et Y sont-elles indépendantes ? Commenter.

Exercice 3 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

On note $R(X)$ le reste dans la division euclidienne de P par $(X - \alpha)(X - \beta)$.

1. On suppose que $\alpha \neq \beta$. Calculer $R(X)$ en fonction de $P(\alpha)$ et $P(\beta)$.
2. On suppose que $\alpha = \beta$.
 - (a) Montrer que $R'(X)$ est le reste dans la division euclidienne de $P'(X)$ par $(X - \alpha)$.
 - (b) Calculer $R(X)$ en fonction de $P(\alpha)$ et $P'(\alpha)$.
3. Deux applications :
 - (a) En déduire les puissances de $A = 3I_p + P$ avec P idempotente.
 - (b) En déduire les puissances de $B = \alpha I_p + N$ avec N nilpotente d'ordre 2.