

Covariance d'un couple de V.A.

Soit $n \geq 1$. On considère le couple de variables aléatoires donné par $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.
 Pour $0 \leq i, j \leq n$, $\mathbb{P}(X = i \cap Y = j) = a \binom{n}{i} \binom{n-i}{j}$.

1. Trouver $a > 0$ afin de définir une loi conjointe unitaire.
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y et en déduire que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$.
3. Montrer que $\text{Cov}(X, Y) = -\frac{n}{9}$. Que peut-on en déduire ?

$$\begin{aligned} 1. \text{ On a } 1 &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \mathbb{P}(X = i \cap Y = j) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} \\ &= a \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} 1^j 1^{n-i-j} \\ &= a \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 1^i 2^{n-i} \\ &= a(1+2)^n = a3^n. \text{ Donc } a = \frac{1}{3^n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Pour } i_0 \in X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket. \\ \text{On a } \mathbb{P}(X = i_0) &= \sum_{j=0}^n \mathbb{P}(X = i_0 \cap Y = j) = a \sum_{j=0}^n \binom{n}{i_0} \binom{n-i_0}{j} \\ &= \frac{1}{3^n} \binom{n}{i_0} 2^{n-i_0} = \binom{n}{i_0} \left(\frac{1}{3}\right)^{i_0} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-i_0}. \\ \text{Donc } X &\sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{3}) \text{ suit la loi binomiale.} \end{aligned}$$

On peut refaire le même de calcul et trouver que $Y \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$ suit également la loi binomiale.

Une autre méthode consiste à remarquer que $\mathbb{P}(X = i \cap Y = j) = a \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!} = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} = \mathbb{P}(X = j \cap Y = i)$. Donc la loi conjointe est symétrique et ainsi $X \sim Y$.

Dans tous les cas, on trouve $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = n \frac{1}{3} = \frac{n}{3}$.

$$\begin{aligned} 3. \text{ On calcul } \mathbb{E}(XY) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \mathbb{P}(X = i \cap Y = j) ij = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} ij \\ &= a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n n \binom{n-1}{i-1} (n-i) \binom{n-i-1}{j-1} \text{ par formule du capitaine} \\ &= n3^{-n} \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} (n-i) \sum_{k=0}^{n-i-1} \binom{n-i-1}{k} \text{ par changement d'indice} \\ &= n3^{-n} \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{n-i} (n-i) 2^{n-i-1} \text{ par symétrie et FBN} \\ &= n3^{-n} \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} (n-1) \binom{n-2}{n-i-1} 2^{n-i-1} \text{ par formule du capitaine} \\ &= n(n-1)3^{-n} 3^{n-2} = \frac{n(n-1)}{9} \text{ par FBN.} \end{aligned}$$

Puis d'après Koening-Huygens, $\text{Cov}(X, Y) = \frac{n(n-1)}{9} - \frac{n}{3} \frac{n}{3} = -\frac{n}{9} \neq 0$. Donc les variables ne sont pas décorréllées puis elles ne sont pas indépendantes.

V.A. et conditionnement

On dispose de 100 dés à 6 faces dont 25 sont truqués de sorte que le 6 intervienne une fois sur deux. On choisit un des dés au hasard puis on le lance. On note X le résultat.

1. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X = 6)$. En déduire la loi de X .
2. Déterminer l'espérance et la variance de X .
3. On lance un dé et on obtient 6. Quelle est la probabilité qu'il soit truqué ?

1. On a note $T = \text{"le dé est truqué"}$. On applique la FPT sur le SCEI $\{T, \bar{T}\}$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \mathbb{P}(X = 6) &= \mathbb{P}(T) \mathbb{P}_T(X = 6) + \mathbb{P}(\bar{T}) \mathbb{P}_{\bar{T}}(X = 6) \\ &= \frac{25}{100} \frac{1}{2} + \frac{75}{100} \frac{1}{6} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

On a $X(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$. Les autres faces sont équiprobables. Notons $a = \mathbb{P}(X = k)$ pour $1 \leq k \leq 5$.

La loi est unitaire donc $1 = \sum_{k=1}^6 \mathbb{P}(X = k) = 5a + \frac{1}{4}$.
 Ainsi $a = \frac{3}{20}$.

2. Par définition, $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^6 \mathbb{P}(X = k)k = \frac{3}{20}(1+2+3+4+5) + \frac{1}{4}6 = \frac{15}{4}$.

Puis le moment d'ordre 2 est $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^6 \mathbb{P}(X=k)k^2 = \frac{3}{20}(1+4+9+16+25) + \frac{1}{4}36 = \frac{69}{4}$. D'après la formule de Koenig-Huygens, on obtient $\mathbb{V}(X) = \frac{69}{4} - \left(\frac{15}{4}\right)^2 = \frac{51}{16}$.

3. On utilise la formule de Bayes $\mathbb{P}_{(X=6)}(T) = \frac{\mathbb{P}(T)\mathbb{P}_T(X=6)}{\mathbb{P}(X=6)} = \frac{(1/4)(1/2)}{(1/4)} = \frac{1}{2}$.

Fonction génératrice d'une loi de probabilité

Soit $X : \Omega \rightarrow X(\Omega)$ une variable aléatoire réelle.

On définit sa fonction génératrice par $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M_X(t) \geq 0$.
2. Montrer que $M_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞ .
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X^k) = M_X^{(k)}(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que pour tout coefficients $a, b \in \mathbb{R}$, on a $M_{aX+b}(t) = e^{bt}M_X(at)$.
5. Calculer M_X si $X \sim \mathcal{U}([1, n])$ suit une loi uniforme.
6. Retrouver l'espérance et la variance d'une telle variable uniforme à l'aide du 3.
7. Calculer M_X si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ suit la loi binomiale.
8. Retrouver l'espérance et la variance d'une telle variable binomiale à l'aide du 3.
9. Montrer que pour n variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, \dots, X_n$, si l'on définit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ alors $M_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n M_{X_k}(t)$.

1. Soit $x \in X(\Omega)$ et $t \in \mathbb{R}$. On a $e^{tx} \geq 0$ donc la moyenne pondérée par des probabilités : $\mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)e^{tx} \geq 0$.
2. Pour tout $x \in X(\Omega)$, $f_x : t \mapsto e^{tx}$ est de classe C^∞ et on a $f_x^{(k)}(t) = x^k e^{tx}$.
Donc la combinaison linéaire $M_X = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)f_x$ est aussi C^∞ .
3. De plus, la dérivée n -ième est :
 $M_X^{(k)}(t) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)f_x^{(k)}(t) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)x^k e^{tx} = \mathbb{E}(X^k e^{tX})$.
On applique la relation précédente en $t=0$ et on a : $M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k e^{0 \cdot X}) = \mathbb{E}(X^k)$.
4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on a $M_{aX+b}(t) = \mathbb{E}(e^{t(aX+b)}) = \mathbb{E}(e^{tb}e^{atX}) = e^{tb}\mathbb{E}(e^{atX}) = e^{bt}M_X(at)$.
5. Dans le cas d'une loi uniforme, on a :
 $M_X(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}e^{tk} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (e^t)^k = \frac{e^t(1-e^{nt})}{n(1-e^t)}$.
6. On obtient par dérivation :
 $M_X'(t) = \frac{e^t - (n+1)e^{(n+1)t} + ne^{(n+2)t}}{n(e^t-1)^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1 - (n+1)^3 + n(n+2)^2}{2n} = \frac{n+1}{2}$.
Et ainsi on a $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$.
Puis de la même manière, on trouve :
 $M_X''(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{2n^2+3n+1}{6}$ donnant la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$
puis $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{n^2-1}{12}$.
7. Dans le cas de loi binomiale, on a :
 $M_X(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} (e^t)^k = (q + pe^t)^n$
d'après la formule du binôme de Newton.
8. En dérivant, on trouve :
 $M_X'(t) = npe^t(q + pe^t)^{n-1}$. Donc $\mathbb{E}(X) = M_X'(0) = np$.
De plus $M_X''(t) = n(n-1)p^2e^{2t}(q + pe^t)^{n-2} + npe^t(q + pe^t)^{n-1}$
et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = M_X''(0) - (np)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) = npq$.
9. Fixons $t \in \mathbb{R}$. Les variables $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes donc $e^{tX_1}, \dots, e^{tX_n}$ le sont aussi d'après le Lemme des coalitions. Puis :
 $M_{S_n}(t) = \mathbb{E}(e^{t(X_1+\dots+X_n)}) = \mathbb{E}(e^{tX_1}e^{tX_2}\dots e^{tX_n}) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(e^{tX_k}) = \prod_{k=1}^n M_{X_k}(t)$.