

Les polynômes

Révision de la semaine 20

Racines d'un polynôme

Lien avec la divisibilité. Multiplicité d'une racine.

Multiplicité d'une somme et d'un produit.

Lien entre somme des multiplicités et degré. Polynôme scindé.

Dérivation formelle

Dérivation des combinaisons linéaires et des produits.

Dérivation n -ième et formule de Leibniz.

Formule de Taylor.

Lien entre annulations des dérivées successives et multiplicité d'une racine.

Décomposition en facteurs irréductibles

Théorème de d'Alembert-Gauss sur $\mathbb{C}[X]$. (résultat admis)

Facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Factorisation des polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Relations entre somme et produit des racines et les coefficients.

Liste de Questions de cours :

- a) Démontrer que $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$.
- b) En développant de deux manières $(X + 1)^{m_1+m_2}$, démontrer la formule de Vandermonde.
- c) Factoriser le polynôme $X^n - 1$ sur $\mathbb{R}[X]$.
- d) Démontrer la règle de Leibniz $(PQ)' = P'Q + PQ'$ avec la définition formelle.
- e) Énoncer et démontrer le lien entre l'annulation des dérivées et la multiplicité d'une racine.
- f) Énoncer et démontrer la formule de Taylor.

Exercices d'Application du Cours

1. Trouver les couples de polynômes (P, Q) tels que :

$$(X + 1)P(X) + (X + 2)Q(X) = X + 3$$

2. Pour $n \geq 1$, on note $P_n(X) = X^{2^n} + X^{2^{n-1}} + 1$.

- (a) Montrer que $P_1(X) = (X - j)(X - j^2)$.
- (b) En déduire les racines complexes de $P_n(X)$.
- (c) En déduire que P_n divise P_{n+1} .

Devoir libre

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ pour tout $x > 0$.

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'il existe une suite de polynômes $P_n \in \mathbb{R}[X]$ telle que :

$$\forall x > 0, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}}$$

vérifiant la relation de récurrence $P_{n+1}(X) = X^2 P_n'(X) + [1 - 2(n+1)X]P_n(X)$.

2. (a) Calculer P_0, P_1, P_2, P_3 et P_4 .
(b) Déterminer le degré, le coefficient dominant et le terme constant de P_n .
3. En calculant de deux manières $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2 f(x))$, montrer que :

$$P_{n+1} = [1 - 2(n+1)X]P_n - n(n+1)X^2 P_{n-1}.$$

Puis en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n' = -n(n+1)P_{n-1}$.

4. (a) Montrer que P_n est scindé à racines simples.
(b) Déterminer le produit des racines de P_n .