

DM4 : Probabilités et Polynôme

à rendre le lundi 9 Mars 2026.

- Exercice 1 :** 1. On définit l'évènement A_n la n -ième personne a la bonne information donc $p_n = \mathbb{P}(A_n)$.
On applique la formule de probabilités totales sur le système $\{A_n, \bar{A}_n\}$.
On a $p_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(\bar{A}_n)\mathbb{P}_{\bar{A}_n}(A_{n+1}) = p_n p + (1 - p_n)(1 - p)$.
2. On reconnait une suite arithmético-géométrique $p_{n+1} = (2p - 1)p_n + (1 - p)$ avec $p_1 = 1$.
Le point fixe est $l = 1/2$ car $(2p - 1)/2 + (1 - p) = 1/2$. Donc $(p_n - 1/2) = (2p - 1)^{n-1}(p_1 - 1/2) = (2p - 1)^{n-1}/2$.
Donc $p_n = \frac{1 + (2p-1)^{n-1}}{2}$.
3. On a $0 < p < 1$ donc $-1 < 2p - 1 < 1$ puis $(2p - 1)^n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ en tant que suite géométrique. Donc $p_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1/2$. Au bout d'un grand nombre d'étapes on ne peut plus différencier le message original de son contraire. Il deviennent équiprobable.

Exercice 2 : 1. On a $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

$\mathbb{P}_{(X,Y)}$	$(X = -2)$	$(X = -1)$	$(X = 0)$	$(X = 0)$	$(X = 1)$	$\mathbb{P}_Y$
$(Y = 0)$	0	0	1/6	0	0	1/6
$(Y = 1)$	0	1/4	0	1/4	0	1/2
$(Y = 2)$	1/6	0	0	0	1/6	1/3
$\mathbb{P}_X$	1/6	1/4	1/6	1/4	1/6	1

2. On a $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6}(-2) + \frac{1}{4}(-1) + \frac{1}{6}0 + \frac{1}{4}1 + \frac{1}{6}2 = 0$.
Puis $\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{6}(-2) \cdot 2 + \frac{1}{4}(-1) \cdot 1 + \frac{1}{6}0 + \frac{1}{4}1 \cdot 1 + \frac{1}{6}2 \cdot 2 = 0$.
Donc $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$.
3. Les variables ne sont pas indépendantes.
Par exemple, $\mathbb{P}(Y = 0 \cap X = -2) = 0$ mais $\mathbb{P}(Y = 0)\mathbb{P}(X = -2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \neq 0$.
Ceci fournit un contre-exemple à la réciproque de "indépendant implique décorrélé".

Exercice 3 : 1. On écrit $P(X) = (X - \alpha)(X - \beta)Q(X) + R(X)$ avec $R(X) = aX + b$ de degré au plus 1.

On obtient $\begin{cases} P(\alpha) = a\alpha + b \\ P(\beta) = a\beta + b \end{cases}$ Ce qui se résout en $\begin{cases} a = \frac{P(\alpha) - P(\beta)}{\alpha - \beta} \\ b = \frac{\alpha P(\beta) - \beta P(\alpha)}{\alpha - \beta} \end{cases}$.

Donc $R(X) = \frac{P(\alpha) - P(\beta)}{\alpha - \beta}X + \frac{\alpha P(\beta) - \beta P(\alpha)}{\alpha - \beta}$.

2. (a) On a $P(X) = (X - \alpha)^2 Q(X) + R(X)$ donc en dérivant :
 $P'(X) = 2(X - \alpha)Q(X) + (X - \alpha)^2 Q'(X) + R'(X) = (X - \alpha)(2Q(X) + (X - \alpha)Q'(X)) + R'(X)$.
C'est bien la division euclidienne de P' par $(X - \alpha)$.
- (b) On sait que $R'(X) = a$ est constant donc $P'(\alpha) = a$.
Puis $P(\alpha) = a\alpha + b$ permet d'obtenir $b = P(\alpha) - \alpha P'(\alpha)$.
3. (a) On a $(A - 3I)^2 = (A - 3I)$ donc $(A - 3I)[A - 3I - I] = 0$. Ainsi $(X - 3)(X - 4)$ est un polynôme annulateur de A .
En appliquant la première partie avec $P(X) = X^n$, on trouve :
 $A^n = R(A) = \frac{4^n - 3^n}{4 - 3}A + \frac{4 \cdot 3^n - 3 \cdot 4^n}{4 - 3}I = (4^n - 3^n)A + (4 \cdot 3^n - 3 \cdot 4^n)I$.
- (b) On a $(B - \alpha I)^2 = 0$ donc en appliquant la seconde partie avec $P(X) = X^n$, on trouve $B^n = R(B) = n\alpha^{n-1}B + (\alpha^n - \alpha n\alpha^{n-1})I = n\alpha^{n-1}B - (n - 1)\alpha^n I$.