

Trouver les couples de polynômes  $(P, Q)$  tels que :

$$(X + 1)P(X) + (X + 2)Q(X) = X + 3$$

En évaluant en  $X$  vaut  $-1$  et  $-2$ . On obtient  $Q(-1) = 2$  et  $P(-2) = -1$ .

Ainsi  $Q(X) = (X + 1)q(X) + 2$  et  $P(X) = (X + 2)p(X) - 1$  avec  $p, q$  d'autres polynômes de degré inférieur.

$$\begin{aligned} \text{On a } (X + 1)P(X) + (X + 2)Q(X) \\ &= (X + 1)(X + 2)[p(X) + q(X)] - (X + 1) + 2(X + 2) \\ &= (X + 1)(X + 2)[p(X) + q(X)] + (X + 3). \end{aligned}$$

Donc en déduit que  $(X + 1)(X + 2)[p(X) + q(X)] = 0$  donc  $p(X) + q(X) = 0$ .

Ainsi les couples solutions sont  $(P, Q) = (-1 - (X + 2)q(X), 2 + (X + 1)q(X))$  pour tout polynôme  $q(X) \in \mathbb{R}[X]$ .

Pour  $n \geq 1$ , on note  $P_n(X) = X^{2^n} + X^{2^{n-1}} + 1$ .

1. Montrer que  $P_1(X) = (X - j)(X - j^2)$ .
2. En déduire les racines complexes de  $P_n(X)$ .
3. En déduire que  $P_n$  divise  $P_{n+1}$ .

1. On a  $P_1(X) = X^2 + X + 1$  donc les racines sont  $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$  et  $\bar{j} = j^2$  son conjugué. Donc  $P_1(X) = (X - j)(X - j^2)$ .

2. Soit  $z \in \mathbb{C}$  une racine complexe.

$$\begin{aligned} \text{On a } P_n(z) &= 0 \\ \text{ssi } z^{2^n} + z^{2^{n-1}} + 1 &= 0 \\ \text{ssi } P_1(z^{2^{n-1}}) &= 0 \text{ car } (z^{2^{n-1}})^2 = (z^{2^n}) \\ \text{ssi } z^{2^{n-1}} &= j = e^{2i\pi/3} \text{ ou son conjugué} \\ \text{ssi } \exists \omega \in \mathbb{U}_{2^{n-1}}, z &= \omega \exp\left(\frac{2i\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}\right) \text{ ou son conjugué} \end{aligned}$$

Donc les racines de  $P_n$  sont les  $\exp\left(\frac{2i\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}(3k + 1)\right)$  et  $\exp\left(\frac{2i\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}(3k - 1)\right)$  pour  $0 \leq k < 2^{n-1}$ . Le polynôme est scindé à racines simples sur  $\mathbb{C}$  car on a trouvé  $2^n$  racines autant que le degré.

3. On peut simplement remarquer que par calcul :

$$(X^{2^n} + X^{2^{n-1}} + 1)(X^{2^n} - X^{2^{n-1}} + 1) = X^{2^{n+1}} + X^{2^n} + 1$$

L'énoncé suggère plutôt de vérifier que si  $z$  est une racine de  $P_n$  alors  $z$  est une racine de  $P_{n+1}$ . En effet, si  $z$  est une racine de  $P_n$  alors  $z^{2^{n-1}} = j$  ou  $z^{2^{n-1}} = \bar{j} = j^2$ .

Mais  $P_{n+1}(z) = (z^{2^n})^2 + (z^{2^n}) + 1 = P_1(j^2) = 0$  dans le premier cas.

Et  $P_{n+1}(z) = P_1((j^2)^2) = P_1(j^4) = 0$  car  $j^4 = j$ . dans le cas conjugué.

## Calcul de dérivés n-ième

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$  pour tout  $x > 0$ .

- Montrer que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et qu'il existe une suite de polynômes  $P_n \in \mathbb{R}[X]$  telle que :

$$\forall x > 0, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}}$$

vérifiant la relation de récurrence  $P_{n+1}(X) = X^2 P'_n(X) + [1 - 2(n+1)X]P_n(X)$ .

- (a) Calculer  $P_0, P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$ .  
(b) Déterminer le degré, le coefficient dominant et le terme constant de  $P_n$ .
- En calculant de deux manières  $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2 f(x))$ , montrer que :

$$P_{n+1} = [1 - 2(n+1)X]P_n - n(n+1)X^2 P_{n-1}.$$

Puis en déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P'_n = -n(n+1)P_{n-1}$ .

- (a) Montrer que  $P_n$  est scindé à racines simples.  
(b) Déterminer le produit des racines de  $P_n$ .

- Par opération la fonction  $f$  est bien de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Soit  $x > 0$ . On montre le résultat par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

Init. Pour  $n = 0$ , on pose  $P_0 = 1$  qui convient.

Hér. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel qu'il existe un polynôme  $P_n$  vérifiant  $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}}$ .

En dérivant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{P'_n(x)x^{2n+2} - (2n+2)x^{2n+1}P_n(x)}{x^{4n+4}} e^{-1/x} + \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} \frac{1}{x^2} e^{-1/x} \\ &= \frac{P'_n(x)x^2 - 2(n+1)xP_n(x) + P_n(x)}{x^{2n+4}} e^{-1/x}. \end{aligned}$$

Donc en posant  $P_{n+1} = X^2 P'_n + [1 - 2(n+1)X]P_n$ , on obtient bien  $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2n+4}} e^{-1/x}$ .

- (a) En appliquant la relation de récurrence, on obtient :

$$P_0 = 1,$$

$$P_1 = -2X + 1,$$

$$P_2 = -2X^2 + (1 - 4X)(1 - 2X) = 6X^2 - 6X + 1,$$

$$P_3 = X^2(12X - 6) + (1 - 6X)(1 - 6X + 6X^2) = -24X^2 + 36X^2 - 12X + 1$$

$$\text{et } P_4 = X^2(-72X^2 + 72X - 12) + (1 - 8X)(1 - 12X + 36X^2 - 24X^3) = 120X^4 - 240X^3 + 120X^2 - 20X + 1.$$

- (b) D'après les premiers termes, on peut faire les conjectures suivantes, le degré est  $n$ , le coefficient dominant est  $(-1)^n(n+1)!$  et le coefficient constant est 1.

On démontre ceci par récurrence, l'initialisation étant faite par la recherche des premiers termes. Le coefficient constant est  $P_{n+1}(0) = 0 + [1 - 0]P_n(0) = 1$  donc il vaut 1.

Puis si  $P_n = (-1)^n(n+1)!X^n + R_n$  avec  $\deg(R_n) < n$  alors :

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= X^2(n(-1)^n(n+1)!X^{n-1} + R'_n) + [1 - 2(n+1)X][(-1)^n(n+1)!X^n + R_n] \\ &= (-1)^n(n+1)![n - 2(n+1)]X^{n+1} + X^2R'_n + P_n - 2(n+1)XR_n. \end{aligned}$$

Or le degré du terme  $X^2R'_n + P_n - 2(n+1)XR_n$  est strictement inférieur à  $n+1$  donc le terme de plus haut degré est  $(-1)^n(n+1)![n - 2(n+1)]X^{n+1} = (-1)^{n+1}(n+2)!X^{n+1}$ , ils sont bien le degré et le coefficient dominant attendu.

- On remarque que  $\frac{d}{dx}(x^2 f(x)) = f(x)$  d'où  $\frac{d^n}{dx^n} \frac{d}{dx}(x^2 f(x)) = f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-1/x}$ .  
Puis d'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2 f(x)) &= x^2 f^{(n+1)}(x) + (n+1)(2x)f^{(n)}(x) + \frac{n(n+1)}{2}(2)f^{(n-1)}(x) + 0 \\ &= (x^2 P_{n+1}(x)/x^{2n+4} + 2x(n+1)P_n(x)/x^{2n+2} + n(n+1)P_{n-1}(x)/x^{2n}) e^{-1/x}. \end{aligned}$$

Par identification, on en déduit que :

$$P_n = P_{n+1} + 2X(n+1)P_n + X^2n(n+1)P_{n-1}$$

puis la formule de l'énoncé.

En faisant la différence des relations de récurrence de la question 1. et de la question 4., on trouve  $P'_n = -n(n+1)P_{n-1}$ .

4. (a) Pour montrer que  $P_n$  n'a que des racines simples, il suffit de montrer que  $P_n$  et  $P'_n$  n'ont pas de racines communes. Par l'absurde, si c'était le cas alors on note  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $P_n(\alpha) = P'_n(\alpha)$  d'après le 5.(a),  $\alpha$  est aussi racine de  $P_{n-1}$ . Puis d'après la relation de récurrence du 1. si  $\alpha$  est racine de  $P_n$  et  $P_{n-1}$  alors  $\alpha$  est racine de  $P_{n+1}$  (et  $P_{n-2}$  si on décale les indices). Donc  $\alpha$  serait une racine commune de tous les polynômes ce qui est absurde car  $P_0 = 1$  n'a aucune racine.
- (b) Le produit des racines est donné par le quotient  $(-1)^n a_0/a_n = 1/(n+1)!$  d'après la question 2.(b).