

Les espaces vectoriels

Définition de la structure et exemple

Ensemble non vide muni d'une addition interne et d'un produit par les scalaires.

Espace vectoriel issue de la géométrie : $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{K}^n$ sur $\mathbb{K}$.

Espace vectoriel issue de l'analyse : $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}$ pour I un ensemble.

Espace vectoriel issue de l'algèbre : $\mathbb{K}[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}$, $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$.

Sous-espaces vectoriels

Définition et équivalence comme sous-ensemble non vide stable par combinaisons linéaires.

Sous-espace $\text{Vect}_{\mathbb{K}}(v_1, \dots, v_n)$ engendré par n vecteurs d'un espace vectoriel.

Somme et intersection de deux sous-espaces vectoriels.

Somme directe et sous-espaces supplémentaires.

Famille finie de vecteurs

Famille de vecteurs libres et liées. Vecteurs colinéaires et coplanaires.

Famille de polynômes échelonnés en degré.

Famille de vecteurs générateurs.

Base d'un espace vectoriel

Base d'un espace et d'un sous-espace. Coordonnées d'un vecteur dans une base.

Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Base compatible à une décomposition en somme directe.

Liste de Questions de cours :

- a) Factoriser le polynôme $X^n - 1$ sur $\mathbb{R}[X]$.
- b) Démontrer la règle de Leibniz $(PQ)' = P'Q + PQ'$ avec la définition formelle.
- c) Énoncer et démontrer le lien entre l'annulation des dérivées et la multiplicité d'une racine.
- d) Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = F_P \oplus F_I$ avec F_P les fonctions paires et F_I les fonctions impaires.
- e) Montrer qu'une famille de polynômes échelonnés en degré est libre.
- f) Montrer que si $\mathcal{B}_1$ est une base de F_1 , $\mathcal{B}_2$ est une base de F_2 et $E = F_1 \oplus F_2$ alors $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E .

Exercices d'Application du Cours

1. Montrer que $\{(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tel que } \forall n \geq 0, u_{2n} = u_{n+1} + u_n\}$ est un $\mathbb{R}$ -ev.
2. Montrer que $\{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P(0) = P(1) = 0\}$ est un $\mathbb{R}$ -ev.
3. Soit $F_1 = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + 2y + z = 0 \right\}$.
Montrer que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$.
4. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Devoir libre

1. Soit $D \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant de degré $n \in \mathbb{N}^*$.
On définit $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } D \text{ divise } P\}$.
Montrer que $\mathbb{R}[X] = F \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. Déterminer si les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$ -espaces-vectoriels :
 - (a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz + 2yz = 0 \right\}$.
 - (b) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x) - f(2-x)\}$.
 - (c) $\left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } \bar{z}_1 + z_2 = 0 \right\}$.
3. Déterminer si les ensembles suivants sont des $\mathbb{C}$ -espaces-vectoriels :
 - (a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \text{ tel que } 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz + 2yz = 0 \right\}$.
 - (b) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x) - f(2-x)\}$.
 - (c) $\left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } \bar{z}_1 + z_2 = 0 \right\}$.