

DS de Mathématiques n° 7 - Corrigé

Exercice 1 : 1. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

(a) F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels

On a $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E \text{ tel que } a + d = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \text{ pour } a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$
 $= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$ est bien un sous-espace de E .

L'espace engendré $F_2 = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(I_2)$ est également un sous-espace de E .

(b) F_1 et F_2 sont en somme directe

Soit $M \in F_1 \cap F_2$. On peut écrire $M = \lambda I_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ car $M \in F_2$.

Puis $M \in F_1$ donne $\lambda + \lambda = 0$ d'où $\lambda = 0$ puis $M = 0_E$.

(c) F_1 et F_2 sont en somme totale

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$.

On recherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} + \lambda I_2$.

Donc $M_2 = \lambda I_2 \in F_2$ convient pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Et $M_1 = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \in F_1$ ssi $(a-\lambda) + (d-\lambda) = 0$ ssi $\lambda = \frac{a+d}{2}$ convient.

Donc il existe bien une décomposition de $M = M_1 + M_2 \in F_1 + F_2$.

2. $E = \mathbb{R}_3[X]$,

(a) F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels

On a $F_1 = \{P \in E \text{ tel que } P''(X) = 0\}$

$= \{aX + b \text{ pour } a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_1[X]$ est bien un sous-espace de E .

L'espace engendré $F_2 = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(X^2 - 1, X^3 + 7X)$ est un sous-espace de E .

(b) F_1 et F_2 sont en somme directe

Soit $P \in F_1 \cap F_2$.

On peut écrire $P = \alpha(X^2 - 1) + \beta(X^3 + 7X)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ car $P \in F_2$.

Puis $P'' = 2\alpha + 6X\beta = 0$ car $P \in F_1$. Donc $\alpha = \beta = 0$ puis $P = 0_E$.

(c) F_1 et F_2 sont en somme totale

Soit $P \in E = \mathbb{R}_3[X]$.

On recherche une décomposition $P = P_1 + P_2$

$= (P(X) - \alpha(X^2 - 1) + \beta(X^3 + 7X)) + (\alpha(X^2 - 1) + \beta(X^3 + 7X))$.

Ainsi $P_2 = \alpha(X^2 - 1) + \beta(X^3 + 7X) \in F_2$ sans condition sur $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Et $P_1 = P - (\alpha(X^2 - 1) + \beta(X^3 + 7X)) \in F_1$ ssi $0 = P_1'' = P'' - (2\alpha + 6X\beta)$.

En évaluant en 0, on obtient $\alpha = \frac{P''(0)}{2}$.

En dérivant puis en évaluant en 0, on trouve $\beta = \frac{P^{(3)}(0)}{6}$.

Il reste à faire la synthèse que le raisonnement n'a pas été fait par équivalence.

En posant $P_1(X) = P(X) - \frac{P^{(2)}(0)}{2}X^2 - \frac{P^{(3)}(0)}{6}X^3$, on peut reconnaître une partie

de la formule de Taylor en 0. C'est à dire $P(X) = \sum_{k=0}^3 \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$.

D'où $P_1(X) = P(0) + P'(0)X \in F_1$ est bien de degré au plus 1.

3. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

(a) F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels

On a $F_1 = \text{Vect}[(2^n)_{n \geq 0}, (3^n)_{n \geq 0}]$ est un espace engendré.

Montrons que $F_2 = \{(u_n)_{n \geq 0} \text{ tel que } u_0 = u_1 = 0\}$ est non vide et stable par combinaison linéaire.

La suite nulle $(0)_{n \geq 0} \in F_2$ car ses deux premiers termes sont nuls.

Soit $(u_n)_{n \geq 0}, (v_n)_{n \geq 0} \in F_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $(w_n)_{n \geq 0} = (u_n)_{n \geq 0} + \lambda(v_n)_{n \geq 0}$.

On a $w_0 = u_0 + \lambda v_0 = 0$ et $w_1 = u_1 + \lambda v_1 = 0$. Donc $(w_n)_{n \geq 0} \in F_2$.

(b) F_1 et F_2 sont en somme directe

Soit $(u_n)_{n \geq 0} \in F_1 \cap F_2$. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = a2^n + b3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

car $(u_n)_{n \geq 0} \in F_1$. Puis $0 = u_0 = a + b$ et $0 = u_1 = 2a + 3b$ donne bien $a = b = 0$

donc $(u_n)_{n \geq 0} = 0_E$ est la suite nulle.

(c) F_1 et F_2 sont en somme totale

Soit $(u_n)_{n \geq 0} \in E$ une suite quelconque.

On recherche une décomposition du type $u_n = (a2^n + b3^n) + (u_n - a2^n - b3^n)$.

Elle convient ssi $w_n = (u_n - a2^n - b3^n)$ vérifient $w_0 = w_1 = 0$.

On résout le système $\begin{cases} u_0 - a - b & 0 \\ u_1 - 2a - 3b & = 0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} a + b & = u_0 \\ 2a + 3b & = u_1 \end{cases}$.

On trouve $a = 3u_0 - u_1$ et $b = u_1 - 2u_0$ qui conviennent.

Exercice 2 : 1. Soit $z \in \mathbb{C}$.

On a $P_1(z) = 0$ ssi $(z^3)^3 - 3(z^3)^2 + 3^2 z^3 - 3^3 = 0$

ssi $\frac{(z^3)^4 - (-3)^4}{z^3 - (-3)} = 0$ et $z^3 \neq -3$

ssi $z^{12} = 3^4$ et $z^3 \neq 3e^{i\pi}$

ssi $z \in \sqrt[3]{3}\mathbb{U}_{12}$ et $z \notin \sqrt[3]{3}\mathbb{U}_3 e^{i\pi/3}$.

Donc $\text{Rac}_{\mathbb{C}}(P) = \{ \sqrt[3]{3} \exp(2ik\pi/12) \text{ pour } k = 0, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11 \}$ sont les 9 racines d'un polynôme de degré 9. Ainsi P_1 est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

Puis $P_1(X) = (X - \sqrt[3]{3})(X - \sqrt[3]{3}e^{i\pi/6})(X - \sqrt[3]{3}e^{-i\pi/6})(X - \sqrt[3]{3}e^{i\pi/2})(X - \sqrt[3]{3}e^{-i\pi/2})$
 $\times (X - \sqrt[3]{3}e^{2i\pi/3})(X - \sqrt[3]{3}e^{-2i\pi/3})(X - \sqrt[3]{3}e^{5i\pi/6})(X - \sqrt[3]{3}e^{-5i\pi/6})$.
 $= (X - \sqrt[3]{3})(X^2 - 3^{5/6}X + 3^{2/3})(X^2 + 3^{2/3})(X^2 + 3^{1/3}X + 3^{2/3})(X^2 + 3^{5/6}X + 3^{2/3})$.

2. On écrit $P_2(X) = A(X) + iB(X)$ avec $A, B \in \mathbb{R}[X]$.

Ainsi $A(X) = 2X^4 - 3X^3 - 8X^2 + 9X + 6$ et $B(X) = 6X^3 - 11X^2 - 3X + 2$.

Une racine réelle de P_2 est une racine commune de A et B donc du $\text{PGCD}(A, B)$. Par le calcul, on obtient $\text{PGCD}(A, B) = X^2 - (3/2)X - 1 = (X - 2)(X + 1/2)$. Donc 2 et $-1/2$ sont des racines de P_2 .

On a $A(X) = (2X^2 - 3X - 2)(X^2 - 3)$ et $B(X) = (2X^2 - 3X - 2)(3X - 1)$.

Donc $P_2(X) = (2X^2 - 3X - 2)(X^2 + 3iX - 3 - i)$.

Le discriminant du facteur complexe est $\Delta = (3i)^2 + 4(3 + i) = 3 + 4i = (2 + i)^2$.

Donc les deux racines restantes sont $\frac{-3i+2+i}{2} = 1 - i$ et $\frac{-3i-2-i}{2} = -1 - 2i$.

Ainsi $P_2(X) = 2(X - 2)(X + 1/2)(X - 1 + i)(X + 1 + 2i)$ est la factorisation sur $\mathbb{C}$.

3. En appliquant la formule du binôme de Newton, on obtient : $P_3(X) = (X^2 - 1)^3 - 1$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $P(z) = 0$ ssi $(z^2 - 1)^3 = 1$

ssi $z^2 - 1 \in \mathbb{U}_3$ ssi $z^2 \in \{2, 1 + j, 1 + j^2\}$.

1er cas : On a $z^2 = 2$ ssi $z \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

2eme cas : On a $z^2 = 1 + j = \frac{1}{2} + i\sqrt{3}2 = e^{i\pi/3}$ ssi $z \in \{e^{i\pi/6}, e^{7i\pi/6}\}$.

3eme cas : Et $z^2 = 1 + j^2$ ssi $z \in \{e^{-i\pi/6}, e^{5i\pi/6}\}$ l'équation conjuguée.

Donc on obtient 6 racines simples d'un polynôme de degré 6.

$P_3(X) = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X - e^{i\pi/6})(X - e^{-i\pi/6})(X - e^{5i\pi/6})(X - e^{-5i\pi/6})$
 $= (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$.

Exercice 3 : 1. D'après la formule du binôme de Newton, on a $(X+i)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^{2n+1-k} i^k$.

Donc $P_n(X) = \frac{1}{2i} \left(\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^{2n+1-k} i^k - \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^{2n+1-k} (-i)^k \right)$

$= \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^{2n+1-k} \frac{i^k - (-i)^k}{2i}$. avec $\frac{i^k - (-i)^k}{2i} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } k \equiv 1[4] \\ -1 & \text{si } k \equiv 3[4] \end{cases}$.

Donc $P_n(X) = \sum_{l=0}^n \binom{2n+1}{2l+1} X^{2n+1-(2l+1)} (-1)^l$ avec le changement d'indice $k = 2l + 1$

C'est à dire $P_n(X) = \sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{2n+1}{2l+1} X^{2(n-l)}$.

C'est bien un polynôme à coefficients réels. Son terme de plus haut degré est $\binom{2n+1}{1} X^{2n}$.

Le degré est donc $2n$ et le coefficient dominant est $2n + 1$.

2. Soit $z \in \mathbb{C} - \{i\}$. On a : $P_n(z) = 0$ ssi $\left(\frac{z+i}{z-i} \right)^{2n+1} = 1$ car $z \neq i$

ssi $\exists \omega \in \mathbb{U}_{2n+1}, \frac{z+i}{z-i} = \omega$
ssi $\exists \omega \in \mathbb{U}_{2n+1}, z = \frac{-i-i\omega}{1-\omega}$ avec $\omega \neq 1$

Pour $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, z_k = i \frac{e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1}{e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1} = \frac{1}{\tan(k\pi/(2n+1))}$ avec l'arc moitié.

3. Pour $1 \leq k \leq n$, on a $l = (2n+1) - k$ vérifie $n+1 \leq l \leq 2n$
et $z_l = \frac{1}{\tan(\pi - k\pi/(2n+1))} = \frac{1}{\tan(k\pi/(2n+1))} = -z_k$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } P_n(X) &= (2n+1) \prod_{k=1}^{2n} (X - z_k) \\ &= (2n+1) \prod_{k=1}^n (X - z_k) \prod_{l=n+1}^{2n} (X - z_l) \\ &= (2n+1) \prod_{k=1}^n (X - z_k)(X + z_k) = (2n+1) \prod_{k=1}^n (X^2 - z_k^2). \end{aligned}$$

En posant $Q_n(X) = (2n+1) \prod_{k=1}^n (X - z_k^2)$, on a bien $P_n(X) = Q_n(X^2)$.

Les racines de Q_n sont les z_k^2 pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

4. D'après le calcul de la question 1., le polynôme $Q_n(X) = \sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{2n+1}{2l+1} X^{n-l}$.

Il est de degré n et scindé à racines simples. La somme de ses racines est $-\frac{b_{n-1}}{b_n}$ avec $b_n = 2n+1$ (pour $l=0$) et $b_{n-1} = -\binom{2n+1}{3}$ (pour $l=1$).

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \sum_{k=1}^n z_k^2 = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{3} = \frac{2n(2n-1)}{6}.$$

Problème I : Polynôme de Legendre

1. (a) On a $Q_n(X) = (X^2 - 1)^n = X^{2n} + R(X)$ avec $\deg R < 2n$.
En dérivant n fois, $L_n(X) = 2n(2n-1)\dots(n+1)X^n + R^{(n)}(X)$
 $= \frac{(2n)!}{n!} X^n + R^{(n)}(X)$ avec $\deg R^{(n)} < 2n - n = n$.
Donc L_n est de degré n et son coefficient dominant est $\frac{(2n)!}{n!}$.
 - (b) On a $Q_n(-X) = ((-X)^2 - 1)^n = (X^2 - 1)^n = Q_n(X)$ est un polynôme pair.
Donc en dérivant n fois, on change n fois de parité.
Si n est pair alors L_n est pair et n est impair alors L_n est impair.
Ainsi $L_n(-X) = (-1)^n L_n(X)$ dans les deux cas.
 - (c) On le démontre par récurrence finie sur k .
Initialisation. Pour $k=0$, le résultat est évident.
Hérédité. Soit $k < n$. Supposons que $Q_n^{(k)}$ admettent $-1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k < 1$ au moins k racines. On peut noter $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_{k+1} = 1$ de sorte que $Q_n^{(k)}(\alpha_i) = 0$ pour tout i . En effet, 1 et -1 sont des racines de multiplicité n de Q_n donc ce sont des racines des dérivées successives $Q_n^{(k)}$. Puis d'après le Théorème de Rolle dans l'intervalle $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, on obtient une racine β_i de la dérivée i.e. $Q_n^{(k+1)}(\beta_i)$. On a ainsi construit $-1 = \alpha_0 < \beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \dots < \beta_k < \alpha_{k+1} = 1$ qui sont $k+1$ racines distinctes dans l'intervalle $] -1, 1[$.
 - (d) On sait que $\text{mult}_1(Q_n) = \text{mult}_{-1}(Q_n) = n$ donc $\text{mult}_1(Q_n^{(k)}) = \text{mult}_{-1}(Q_n^{(k)}) = n-k$. On dispose de k autres racines dans $] -1, 1[$ notée α_i avec $\text{mult}_{\alpha_i}(Q_n) \geq 1$. En calculant $\text{mult}_{-1}(Q_n^{(k)}) + \text{mult}_1(Q_n^{(k)}) + \sum_{i=1}^k \text{mult}_{\alpha_i}(Q_n) \geq 2(n-k) + k = 2n-k = \deg(Q_n^{(k)})$. Or on a toujours $\sum_{\alpha} \text{mult}_{\alpha}(Q_n^{(k)}) \leq \deg(Q_n^{(k)})$. Donc il y a égalité, le polynôme est scindé et ses racines sont celles déjà connues. En particulier, toutes les racines sont réelles. D'où $Q_n^{(k)}$ est scindé sur $\mathbb{R}[X]$.
2. (a) On a $Q_n(X) = (X-1)^n(X+1)^n = (X-1)^n[(X-1) + 2]^n$
 $= (X-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (X-1)^k 2^{n-k}$ d'après la formule du binôme de Newton
 $= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (X-1)^{n+k}$.
 - (b) La dérivée n -ième de $(X-1)^{n+k}$ est $(n+k)(n+k-1)\dots(k+1)X^k = \frac{(n+k)!}{k!} X^k$.
Donc par linéarité, $L_n(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} \frac{(n+k)!}{k!} (X-1)^k$
 $= \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!n!}{k!2^{n-k}} 2^{n-k} (X-1)^k$.
 - (c) Dans la somme le terme en $k=0$ donne la valeur de $L_n(1)$ car les termes s'annulent. Ainsi $L_n(1) = 2^n n!$.
Puis la parité de la fonction donne $L_n(-1) = (-1)^n 2^n n!$.

Pour calculer, $L_n(0)$ on doit adapter la méthode.

On développe $Q_n(X) = (X^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (X^2)^k (-1)^{2n-k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} X^{2k}$.

Puis par dérivation $L_n(X) = \sum_{k \geq n/2} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(2k)!}{2^{k-n}} X^{2k-n}$.

Le terme constant est le coefficient de X^0 .

Si n est impair, il n'y en a pas et $L_n(0) = 0$.

Si $n = 2p$ est pair, alors il s'agit du terme pour $k = p$.

Donc $L_n(0) = (-1)^p \binom{2p}{p} \frac{(2p)!}{p!} = (-1)^p \frac{(2p)!^2}{p!^3}$.

- (d) Le polynôme L_n est pair ou impair. Donc dans tous les cas, le coefficient de X^{n-1} est nul. Donc la somme des racines est nulle.

Le produit des racines vaut $(-1)^n \frac{a_0}{a_n} = (-1)^n \frac{L_n(0)}{(2n)!/n!}$.

Si n est impair ce produit est nul.

Si $n = 2p$ est pair alors le produit vaut $(-1)^p \frac{(2p)!^3}{(4p)!p!^3} = (-1)^{n/2} \frac{n!^3}{(2n)!(n/2)!^3}$.

- (a) On peut effectuer une intégration par partie.

$$\langle P', Q \rangle = \int_{-1}^1 P'(t)Q(t) dt = [P(t)Q(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P(t)Q'(t) dt = [0 - 0] - \langle P, Q' \rangle.$$

- (b) On a $\langle L_n, Q \rangle = \langle Q_n^{(n)}, Q \rangle = -\langle Q_n^{(n-1)}, Q' \rangle$ en appliquant la question précédente.

Puis on peut réitérer pour obtenir $\langle Q_n^{(n-2)}, Q'' \rangle = \dots = (-1)^k \langle Q_n^{(n-k)}, Q^{(k)} \rangle$.

Ainsi par récurrence immédiate, $\langle L_n, Q \rangle = (-1)^n \langle Q_n, Q^{(n)} \rangle = 0$.

En effet, $Q^{(n)} = 0$ car $\deg Q < n$ et $\langle P, 0 \rangle = 0$ par calcul immédiat.

- (c) Si $n > m$ alors $Q = L_m$ est de degré m strictement plus petit que n . D'après la question précédente, $\langle L_n, L_m \rangle = \langle L_n, Q \rangle = 0$.

Si $n < m$ alors on peut observer que $\langle L_n, L_m \rangle = \langle L_m, L_n \rangle$ car l'expression de l'énoncé est symétrique. Donc on obtient également 0 d'après le 1er cas.

- (d) La méthode de la question 3.(b) donne $\langle L_n, L_n \rangle = (-1)^n \langle Q_n, L_n^{(n)} \rangle$.

Or $L_n = \frac{(2n)!}{n!} X^n + \dots$ d'après la 1er question. Donc $L_n^{(n)} = (2n)!$.

Il reste à calculer $(-1)^n (2n)! \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dt = (2n)! I_n$ avec $I_n = \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt$.

On peut effectuer une IPP avec 1, $I_n = [t(1 - t^2)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 t(-2t)n(1 - t^2)^{n-1} dt$.

Donc on obtient $I_n = 2n \int_{-1}^1 t^2(1 - t^2)^{n-1} dt$

$$= 2n \int_{-1}^1 [1 - (1 - t^2)](1 - t^2)^{n-1} dt = 2n[I_{n-1} - I_n].$$

Ceci donne la relation de récurrence, $(2n + 1)I_n = 2nI_{n-1}$ i.e. $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.

On en déduit par récurrence, $I_n = \frac{2n \cdot (2n-2) \dots 2}{(2n+1) \cdot (2n-1) \dots 3} I_0 = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} 2$.

Ainsi on obtient bien $\langle L_n, L_n \rangle = \frac{(n!)^2}{2n+1} 2^{2n+1}$ après simplification.

Problème II : 1. (a) La fonction f est C^∞ par opération sur $\mathbb{R}^*$.

Pour $n = 0$, $P_0(X) = 1$ et $c_0 = 1$ conviennent à l'expression recherchée.

On suppose connu P_n et c_n tel que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)e^x - c_n}{x^{n+1}}$

$$\begin{aligned} \text{Donc } f^{(n+1)}(x) &= \frac{(P_n'(x)e^x + P_n(x)e^x)x^{n+1} - (n+1)x^n(P_n(x)e^x - c_n)}{(x^{n+1})^2} \\ &= \frac{[xP_n'(x) + xP_n''(x) - (n+1)P_n'(x)]e^x + (n+1)c_n}{x^{n+2}} \end{aligned}$$

Donc $P_{n+1}(X) = X P_n'(X) + (X - (n+1))P_n(X)$ et $c_{n+1} = -(n+1)c_n$ conviennent.

- (b) On montre par récurrence que $c_n = (-1)^n n!$.

On a $c_0 = 1 = (-1)^0 0!$.

Puis $c_{n+1} = -(n+1)c_n = -(n+1)(-1)^n n! = (-1)^{n+1} (n+1)!$.

2. (a) On a $P_0 = 1$, $P_1 = X - 1$, $P_2 = X^2 - 2X + 2$, $P_3 = X^3 - 3X^2 + 6X - 6$.

- (b) Le polynôme P_n semble unitaire de degré n .

On le démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

L'initialisation est acquise pour $n \leq 3$.

On suppose que $P_n(X) = X^n + R(X)$ avec $\deg R < n$.

On obtient $P_{n+1}(X) = X P_n'(X) + (X - (n+1))[X^n + R(X)]$

$$= X^{n+1} + [XP'_n(X) - (n+1)X^n + (X - (n+1))R(X)].$$

Il est bien unitaire de degré $n+1$ car $\deg[XP'_n(X) - (n+1)X^n + (X - (n+1))R(X)] \leq n < (n+1)$.

3. (a) On a $xf(x) = e^x - 1$ donc la manière la plus simple est $(xf(x))^{(n+1)} = (e^x)^{(n)} = e^x$.
 Puis d'après la formule de Leibniz, $(xf(x))^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{(k)} f^{(n+1-k)}(x)$
 $= xf^{(n+1)}(x) + (n+1)1.f^{(n)}(x) + 0 + \dots + 0$
 $= x \frac{P_{n+1}(x)e^x - c_{n+1}}{x^{n+2}} + (n+1) \frac{P_n(x)e^x - c_n}{x^{n+1}}$.
 On en déduit que $x^{n+1}e^x = [P_{n+1}(x) + (n+1)P_n(x)]e^x - (c_{n+1} + (n+1)c_n) = [P_{n+1}(x) + (n+1)P_n(x)]e^x$.
 Donc $P_{n+1}(X) + (n+1)P_n(X) = X^{n+1}$ puis $P_{n+1}(X) = X^{n+1} - (n+1)P_n(X)$.
 (b) En évaluant en 0 la relation précédente, on obtient $P_{n+1}(0) = -(n+1)P_n(0)$ qui est la même relation de récurrence que c_n . Puis $P_0(0) = 1 = c_0$ donc on obtient bien que $P_n(0) = c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 4. (a) En combinant les résultats du 1.(a) $P_{n+1}(X) = XP'_n(X) + (X - (n+1))P_n(X)$ et du 3.(a) $P_{n+1}(X) = X^{n+1} - (n+1)P_n(X)$. On trouve bien $P_n + P'_n = X^n$ après simplification.
 (b) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine au moins double sur $\mathbb{C}$ alors $\alpha^n = P_n(\alpha) + P'_n(\alpha) = 0$ donc $\alpha = 0$. Or $P_n(0) = c_n = (-1)^n n! \neq 0$. Donc $\alpha = 0$ n'est jamais racine. Absurde.
 (c) Le polynôme est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Donc le produit des racines est $(-1)^d \frac{a_0}{a_d} = (-1)^n P_n(0) = n!$.
 5. (a) On a $P'_{n+1} = X^{n+1} - P_{n+1}$ d'après la question 4.(a).
 Or $P_{n+1} = X^{n+1} - (n+1)P_n$ d'après la question 3.(a).
 Donc on obtient $P'_{n+1} = (n+1)P_n$.
 (b) Démontrons par récurrence $P_n(X) = (-1)^n n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} X^k$.
 Initialisation. $P_0(X) = 1$ convient à la formule.
 Hérédité. On suppose que $P_n(X) = (-1)^n n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} X^k$. Donc $P_{n+1} = (n+1)(-1)^n n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \frac{X^{k+1}}{k+1} + c_{n+1}$ est la primitive telle que $P_{n+1}(0) = c_{n+1}$. Après décalage des indices, on trouve : $P_{n+1}(X) = -(n+1)c_n \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} X^k + c_{n+1} = c_{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} X^k$ en ajoutant la constante pour $k=0$.
 (c) La somme est racine est $-\frac{a_{d-1}}{a_d} = -a_{n-1} = -c_n \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} = n$ en prenant $k = n-1$ dans la question précédente.
 6. (*) On recherche la limite lorsque $x \rightarrow 0$ du quotient $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)e^x - c_n}{x^{n+1}}$.
 En appliquant la règle de L'Hôpital, on étudie le quotient $\frac{(P'_n(x) + P_n(x))e^x}{(n+1)x^n} = \frac{x^n e^x}{(n+1)x^n} = \frac{e^x}{n+1} \rightarrow \frac{1}{n+1}$. Donc $f^{(n)}$ se prolonge par continuité pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $f^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1}$.
 Ainsi f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.