

Devoir Surveillé de Mathématiques n° 7

le samedi 21 Mars 2026 - durée 4h

Exercice 1 : Montrer que $E = F_1 \oplus F_2$ avec :

1. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E \text{ tel que } a + d = 0 \right\}$ et $F_2 = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(I_2)$.
2. $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F_1 = \{P \in E \text{ tel que } P''(X) = 0\}$ et $F_2 = \text{Vect}_{\mathbb{R}}[X^2 - 1, X^3 + 7X]$.
3. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $F_1 = \text{Vect}[(2^n)_{n \geq 0}, (3^n)_{n \geq 0}]$ et $F_2 = \{(u_n)_{n \geq 0} \text{ tel que } u_0 = u_1 = 0\}$.

Exercice 2 : Factoriser en produit d'irréductibles les polynômes suivants :

1. $P_1 = X^9 - 3X^6 + 9X^3 - 27$ sur $\mathbb{R}[X]$.
Indication : Utiliser la formule $a^n - b^n = (a - b) \times \dots$
2. $P_2 = 2X^4 + (-3 + 6i)X^3 + (-8 - 11i)X^2 + (9 - 3i)X + 6 + 2i$ sur $\mathbb{C}[X]$.
Indication : P_2 admet des racines réelles.
3. $P_3 = X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 2$ sur $\mathbb{R}[X]$.
Indication : Utiliser la formule du Binôme de Newton.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P_n = \frac{1}{2i} ((X + i)^{2n+1} - (X - i)^{2n+1})$.

1. Montrer que P_n est à coefficients réels. Préciser son degré et son coefficient dominant.
2. Déterminer les racines de P_n .
3. Montrer qu'il existe un polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n(X) = Q_n(X^2)$.
En déduire les racines de Q_n .
4. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$.

Problème I : Polynôme de Legendre

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $Q_n = (X^2 - 1)^n$ et $L_n = Q_n^{(n)}$.

1. (a) Déterminer le degré de L_n et montrer que son coefficient dominant est $\frac{(2n)!}{n!}$.
(b) Montrer que $L_n(-X) = (-1)^n L_n(X)$.
(c) Montrer que pour tout $0 \leq k \leq n$,
 $Q_n^{(k)}$ admet au moins k racines distinctes dans $] -1, 1[$.
(d) En déduire que pour tout $0 \leq k \leq n$, $Q_n^{(k)}$ est scindé sur $\mathbb{R}[X]$.
2. (a) Montrer que $Q_n(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (X - 1)^{n+k}$.
(b) En déduire que $L_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!n!}{k!^2(n-k)!} 2^{n-k} (X - 1)^k$.
(c) Calculer les valeurs de $L_n(1)$, $L_n(-1)$ et $L_n(0)$.
(d) Déterminer la somme et le produit des racines de L_n .
3. Pour tout couple de polynômes $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on définit $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$.
(a) Montrer que si $P(1) = P(-1) = 0$ alors $\langle P', Q \rangle = -\langle P, Q' \rangle$.
(b) En déduire que pour Q de degré au plus $n - 1$, $\langle L_n, Q \rangle = 0$.
(c) Montrer que $\langle L_n, L_m \rangle = 0$ si $n \neq m$.
(d) (*) Montrer que $\langle L_n, L_n \rangle = \frac{(n!)^2}{2^{n+1}} 2^{2n+1}$.

Problème II : Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}.$$

1. (a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ et un nombre $c_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \neq 0, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)e^x - c_n}{x^{n+1}}$$

vérifiant les relations de récurrence :

$$P_{n+1}(X) = XP'_n(X) + (X - (n+1))P_n(X) \text{ et } c_{n+1} = -(n+1)c_n$$

- (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = (-1)^n n!$.
2. (a) Calculer P_0, P_1, P_2 et P_3 .
- (b) Déterminer le degré et le coefficient dominant P_n .
3. (a) En calculant de deux manières $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(xf(x))$, montrer que :

$$P_{n+1}(X) = X^{n+1} - (n+1)P_n(X)$$

- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(0) = c_n$.
4. (a) Montrer que $P_n + P'_n = X^n$.
- (b) Montrer que P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.
- (c) En déduire le produit des racines de P_n .
5. (a) Montrer que $P'_{n+1} = (n+1)P_n$.
- (b) En déduire que $P_n(X) = (-1)^n n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} X^k$.
- (c) Déterminer la somme des racines de P_n .
6. (*) Montrer que f se prolonge en 0 en une fonction de classe C^∞ .