

DS 6 de Mathématiques n° 6 - Corrigé

Exercice 1 : On pose $\Omega = \mathcal{P}_5(\llbracket 1, 10 \rrbracket)$ avec un aléa $\omega = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ les cinq boules tirées.

- a. Il y a cinq boules paires donc une seule issue favorable $\omega = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.
La probabilité est $\frac{1}{\text{Card}(\Omega)} = \binom{10}{5}^{-1} = 1/252$.
- b. On note B l'évènement 'extraire les bleus'. On a $B = \{\{3, 4, 5, b_1, b_2\} \text{ pour } b_1 \neq b_2 \text{ non bleu}\}$. Donc $\text{Card}(B) = \text{Card}(\mathcal{P}_2(\{1, 2\} \uplus \llbracket 6, 10 \rrbracket)) = \binom{7}{2} = 21$ et $\mathbb{P}(B) = 1/12$.
- c. On note C l'évènement au moins une de chaque couleur. On a $\bar{C} = JB \cup BR \cup RJ$ avec JB des tirages avec des jaunes et des bleus, BR des bleus et des rouges et RJ des rouges et des jaunes. On a $JB \cap RJ = \emptyset$ car il n'y a que 2 jaunes et de même pour JB et BR sont disjoints. Enfin l'intersection $BR \cap RJ$ est constituée d'un seul aléa. Ainsi $\text{Card}(\bar{C}) = \text{Card}(JB) + \text{Card}(BR) + \text{Card}(RJ) - \text{Card}(B)$
 $= \binom{2+3}{5} + \binom{3+5}{5} + \binom{5+2}{5} - 1 = 77$.
Donc $\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(\bar{C}) = \frac{175}{252} = \frac{25}{36}$.
- d. On note D 'tirer les impaires'. On calcul $\mathbb{P}_C(D) = \frac{\mathbb{P}(C \cap D)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\text{Card}(C \cap D)}{\text{Card}(C)} = \frac{1}{175}$ car $C \cap D = D$ est un évènement élémentaire.

Exercice 2 : 1. Les événements $\{A_n, B_n, C_n\}$ forment un SCEI. Donc $a_n + b_n + c_n = 1$.
Ce qui s'écrit également $(1, 1, 1) \cdot X_n = 1$.

2. On applique la formule des probabilités totales sur le SCEI $\{A_n, B_n, C_n\}$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n\mathbb{P}_{A_n}(\bar{R}_n) + b_n\frac{1}{2}\mathbb{P}_{B_n}(R_n) + c_n\frac{1}{2}\mathbb{P}_{C_n}(R_n) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + 0c_n.$$

$$\text{De même, on trouve } b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + 0c_n.$$

$$\text{Et } c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + c_n.$$

$$\text{Donc } X_{n+1} = \frac{1}{4}MX_n \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. On a $M^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 7 & 16 \end{pmatrix}$. Donc $M^2 - 4M + 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\text{Puis } M - 4I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ D'où } (M^2 - 4M + 3I_3)(M - 4I_3) = 0.$$

On dispose d'un polynôme annulateur de M .

$$\text{On le note } P(X) = (X^2 - 4X + 3)(X - 4) = (X - 1)(X - 3)(X - 4).$$

On réalise la division euclidienne de X^n par $P(X)$.

$$\text{On trouve } X^n = P(X)Q_n(X) + \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n.$$

$$\text{En évaluant en les racines, on trouve } \begin{cases} 1 &= \alpha_n + \beta_n + \gamma_n \\ 3^n &= 9\alpha_n + 3\beta_n + \gamma_n \\ 4^n &= 16\alpha_n + 4\beta_n + \gamma_n \end{cases}.$$

$$\text{Puis } \begin{cases} \alpha_n &= \frac{1-3 \cdot 3^n + 2 \cdot 4^n}{6} \\ \beta_n &= \frac{-7+15 \cdot 3^n - 8 \cdot 4^n}{6} \\ \gamma_n &= 2 - 2 \cdot 3^n + 4^n \end{cases}. \text{ Donc } M^n = \alpha_n M^2 + \beta_n M + \gamma_n I_3 = \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2} & 0 \\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2} & 0 \\ 4^n - 3^n & 4^n - 3^n & 4^n \end{pmatrix}.$$

4. On a $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Puis $X_n = \frac{1}{4^{n-1}}M^{n-1}X_1$ comme suite géométrique matricielle.

$$\text{Donc } a_n = \frac{3^{n-1}+1}{2 \cdot 4^{n-1}}, b_n = \frac{3^{n-1}-1}{2 \cdot 4^{n-1}}, \text{ et } c_n = \frac{4^{n-1}-3^{n-1}}{4^{n-1}}.$$

5. On applique la Formule des probabilités totales sur le SCEI $\{A_n, B_n, C_n\}$.
On a $\mathbb{P}(R_n) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(R_n) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(R_n) + \mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}_{C_n}(R_n) = a_n \frac{1}{2} + b_n \frac{1}{2} = \frac{3^{n-1}}{2 \cdot 4^{n-1}}$.
6. En passant à la limite, on obtient $a_n \rightarrow_{+\infty} 0$, $b_n \rightarrow_{+\infty} 0$ et $c_n \rightarrow_{+\infty} 1$ d'une part.
Puis $\mathbb{P}(R_n) = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \rightarrow_{+\infty} 0$.

Exercice 3 : a. On a $K \equiv \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ suit une loi uniforme. Donc $\mathbb{E}(K) = \frac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(K) = \frac{n^2-1}{12}$.

- b. On a appliqué la formule des probabilités totales sur le SCEI $\{K = k\}_{k \in K(\Omega)}$.

$$\text{On a } \mathbb{P}(B_1) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(K = k) \mathbb{P}_{(K=k)}(B_1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{k}{k+(n-k)} = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

On peut observer les tirages B_1 et B_2 suivent la même loi.

En effet, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{(K=k)}(B_2) &= \mathbb{P}_{(K=k)}(B_1 \cap B_2) + \mathbb{P}_{(K=k)}(\bar{B}_1 \cap B_2) \\ &= \frac{k}{n} \frac{(k-1)}{n} + \frac{(n-k)}{n} \frac{k}{n-1} = \frac{k}{n} = \mathbb{P}_{(K=k)}(B_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \mathbb{P}(B_2) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(K = k) \mathbb{P}_{(K=k)}(B_2) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(K = k) \mathbb{P}_{(K=k)}(B_1) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

- c. On a appliqué la formule des probabilités totales sur le SCEI $\{K = k\}_{k \in K(\Omega)}$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(K = k) \mathbb{P}_{(K=k)}(B_1 \cap B_2) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(K = k) \mathbb{P}_{(K=k)}(B_1) \mathbb{P}_{(K=k) \cap B_1}(B_2) \text{ par la } \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">\text{formule de probabilité composée} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{k}{n} \frac{k-1}{n-1} = \frac{1}{n^2(n-1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n+1}{3n}. \end{aligned}$$

$$\text{Puis } \mathbb{P}(B_1) \mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) \text{ ssi } \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \frac{n+1}{3n} \text{ ssi } 4n = 3(n+1) \text{ ssi } n = 3.$$

Donc les événements sont indépendants si et seulement $n = 3$.

- d. On note $A = B_1 \cap B_2$ l'événement tirer deux blanches.

$$\begin{aligned} \text{Soit } k \in K(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket. \text{ D'après la } \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">\text{formule de Bayes} \quad \mathbb{P}_A(K = k) &= \frac{\mathbb{P}(K=k) \mathbb{P}_{(K=k)}(A)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{1}{n} \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \frac{3n}{n+1} = \frac{k(k-1)}{3(n+1)n(n-1)}. \end{aligned}$$

- e. Notons N la variable aléatoire qui suit la nouvelle loi $N(\Omega) = \llbracket 2, n \rrbracket$ et $\mathbb{P}(N = k) = \frac{k(k-1)}{3(n+1)n(n-1)}$. On calcul $\mathbb{E}(N) = \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{3(n+1)n(n-1)} k$

$$= \frac{1}{3(n+1)n(n-1)} \left(\sum_{k=1}^n k^3 - \sum_{k=1}^n k^2 \right)$$

$$= \frac{1}{3(n+1)n(n-1)} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) = \frac{3n+2}{4}.$$

Cette valeur est toujours strictement supérieure à $\mathbb{E}(K) = \frac{n+1}{2}$

Problème I : D'après Math-A Banque PT 2025

Partie 1 : Calcul de l'espérance du gain d'un joueur

1. On a $Y_k(\Omega) = \{0, 1\}$. Elle suit une loi de Bernoulli dont le succès est "le joueur k gagne" de probabilité $\frac{1}{2}$. Donc $Y_k \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$.
2. Les variables $Y_1, \dots, Y_n$ sont identiquement distribuées et mutuellement indépendantes donc $N = \sum_{k=1}^n Y_k$ suit une loi binomiale de paramètre n et $\frac{1}{2}$. Ainsi $N \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.
Donc $\mathbb{E}(N) = \frac{n}{2}$.
3. Si aucun joueur gagne alors $S = 0$ personne n'a de gain. Si au moins un joueur gagne alors $S = n$ car la somme est répartie.
On a $\mathbb{P}(S = 0) = \mathbb{P}(Y_1 = 0 \cap \dots \cap Y_n = 0) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(Y_k = 0) = \frac{1}{2^n}$.
Donc $\mathbb{P}(S = n) = 1 - \mathbb{P}(S = 0) = 1 - \frac{1}{2^n}$.
L'espérance de S est par définition $\mathbb{E}(S) = 0\mathbb{P}(S = 0) + n\mathbb{P}(S = n) = n(1 - \frac{1}{2^n})$.
4. Les variables aléatoire X_k sont identiquement distribuées (mais pas indépendantes).
Donc $\mathbb{P}(X_k) = a_n$ ne dépend pas de k .
Puis $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(\sum_{k=1}^n X_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = na_n$ par linéarité.
Avec la question précédente, on en déduit $a_n = (1 - \frac{1}{2^n})$.
5. L'espérance du gain $\mathbb{E}(X_k) = a_n$ dépend de n . C'est une suite croissante. Donc si un nouveau joueur arrive le gain va augmenter en moyenne.

Partie 2 : Etude de la variable X_k

6. Si le gain est nul alors le joueur a perdu. Donc $\mathbb{P}(X_k = 0) = \mathbb{P}(Y_k = 0) = \frac{1}{2}$.
7. On a $A = N - Y_k = \sum_{i \neq k} Y_k$.
La variable aléatoire A suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(n-1, \frac{1}{2})$.
D'après le lemme des coalitions, elle est indépendante de Y_k .
8. Si le gain est non nul alors le joueur à gagner i.e $Y_k = 1$.
Donc $\mathbb{P}(X_k = \frac{n}{i}) = \mathbb{P}((Y_k = 1) \cap (X_k = \frac{n}{i}))$
 $= \mathbb{P}(Y_k = 1) \mathbb{P}_{(Y_k=1)}(N = i)$ d'après la FPC.
Puis $N = A + Y_k$. Ainsi $\mathbb{P}_{(Y_k=1)}(N = i) = \mathbb{P}_{(Y_k=1)}(A = i - 1)$
 $= \mathbb{P}(A = i - 1) = \binom{n-1}{i-1} \frac{1}{2^{n-1}}$.
Donc $\mathbb{P}(X_k = \frac{n}{i}) = \mathbb{P}_{(Y_k=1)}(N = i) = \binom{n-1}{i-1} (\frac{1}{2})^n$.
9. On a $\mathbb{E}(X_k) = 0\mathbb{P}(X_k = 0) + \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_k = \frac{n}{i}) \frac{n}{i}$
 $= \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} (\frac{1}{2})^n \frac{n}{i} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} = \frac{1}{2^n} (2^n - 1) = 1 - \frac{1}{2^n}$
10. On a $(X_k = n) \cap (X_j = n) = \emptyset$ car c'est impossible que deux joueurs gagnent tout l'argent. Mais $\mathbb{P}(X_k = n) \mathbb{P}(X_j = n) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2^n} \neq 0$.

Partie 3 : le match retour

10. On a toujours $0 \leq T \leq N \leq n$. Donc $T(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ car $N(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.
11. Sachant $N = i$, $T = 0$ si personne ne gagne et $T = i$ sinon.
Donc $\mathbb{P}_{(N=i)}(T = 0) = \frac{1}{2^i}$ et $\mathbb{P}(N = i)(T = i) = 1 - \frac{1}{2^i}$.
12. Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on peut appliquer la formule des probabilités totales :
 $\mathbb{P}(T = j) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(N = i) \mathbb{P}_{(N=i)}(T = j)$
 $= \mathbb{P}(N = j) \mathbb{P}_{(N=j)}(T = j)$ car les autres termes sont nuls.
 $= \binom{n}{j} \frac{1}{2^n} (1 - \frac{1}{2^j})$
 $= \binom{n}{j} (2^{-n} - 2^{-n-j})$.
Pour $j = 0$, $\mathbb{P}(T = 0) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(N = i) \mathbb{P}_{(N=i)}(T = 0)$
 $= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{1}{2^n} \frac{1}{2^i}$
 $= \frac{1}{2^n} (\frac{1}{2} + 1)^n = (\frac{3}{4})^n$.
Puis $\mathbb{E}(T) = \sum_{j=0}^n \mathbb{P}(T = j) j$
 $= \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (2^{-n} - 2^{-n-j}) j$
 $= n \sum_{j=1}^n \binom{n-1}{j-1} (2^{-n} - 2^{-j-n})$
 $= n(2^{-n} 2^{n-1} - 2^{-n} (1/2 + 1)^{n-1})$
 $= \frac{n}{2} [1 - (\frac{3}{4})^n]$.
13. On sait que les Z_k sont identiquement distribuées. Notons $b_n = \mathbb{E}(Z_k)$.
Donc $\mathbb{E}(T) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Z_k) = n b_n$.
Ainsi $b_n = \frac{1}{2} [1 - (\frac{3}{4})^n]$.
14. Le gain est inférieur au gain du premier match. Donc il vaut mieux ne pas parier avec les gagnants sur ce second match.