

Devoir Surveillé de Mathématiques n° 6

le samedi 14 Février 2026 - durée 3h30

Exercice 1 : Une urne contient dix boules numérotées de 1 à 10. Les boules 1 et 2 sont jaunes. Les boules 3, 4 et 5 sont bleus. Les autres boules sont rouges. On tire sans remise 5 boules de l'urne. On modélise ces tirages par $\Omega = \mathcal{P}_5(\llbracket 1, 10 \rrbracket)$.

- Déterminer la probabilité d'extraire toutes les boules paires.
- Déterminer la probabilité d'extraire toutes les boules bleus.
- Déterminer la probabilité d'obtenir au moins une boule de chaque couleur.
- Déterminer la probabilité d'obtenir toutes les boules impaires sachant que l'on a tiré au moins une de chaque couleur.

Exercice 2 : Pour se rendre au lycée, on dispose de trois trajets notés A, B ou C . Suivant les trajets A et B , il y a un risque $1/2$ d'arriver en retard. Il n'y a jamais de retard sur le trajet C . Si on arrive en retard, le lendemain nous choisissons un des deux autres trajets de manière équiprobable. Sinon nous conservons le même trajet. Le premier jour, nous avons emprunté l'itinéraire A . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note :

- A_n, B_n et C_n les événements faire le trajet du n -ième jour suivant les itinéraires A, B ou C respectivement.
- R_n l'événement "arriver en retard le n -ième jour".
- $a_n = \mathbb{P}(A_n), b_n = \mathbb{P}(B_n), c_n = \mathbb{P}(C_n)$ et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

- Montrer que $(1, 1, 1) \cdot X_n = 1$.
- Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ telle que $X_{n+1} = \frac{1}{4}MX_n$.
- Calculer $(M^2 - 4M + 3I_3)(M - 4I_3)$ puis les puissances de M .
- En déduire les probabilités des événements A_n, B_n et C_n .
- Déterminer la probabilité de R_n .
- Calculer les limites de ces probabilités pour $n \rightarrow +\infty$ et commenter.

Exercice 3 : Soit $n \geq 2$. On dispose de n cartons numérotés de 1 à n . On prend un carton au hasard et on note K le numéro du carton. On place alors, dans une urne, K boule(s) blanche(s) et $n - K$ boule(s) noire(s). On tire sans remise deux boules de l'urne. On note B_k l'événement "la k -ième boule est blanche".

- Quelle loi suit la variable aléatoire K ? Préciser son espérance et sa variance.
- Déterminer les probabilités de B_1 et de B_2 .
- Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?
- Déterminer la loi de la variable aléatoire K sachant que l'on a tiré deux boules blanches.
- Calculer l'espérance de K sachant que l'on a tiré deux boules blanches et comparer.

Problème I : Un groupe de $n \geq 3$ amis parie sur l'issue d'un match opposant deux équipes.

On fait les hypothèses suivantes :

- Chaque équipe a une probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner le match.
- Chaque joueur parie 1 euro.
- Chaque joueur effectue son pari indépendamment des autres joueurs.
- Un joueur est déclaré gagnant s'il a parié sur la bonne issue du match.
- L'ensemble des gagnants se partage équitablement la mise totale de n euros.

Dans l'ensemble du problème, on appelle gain d'un joueur la somme qu'il reçoit à l'issue du match. Ce gain ne prend pas en compte la somme qui a été mise. Ainsi s'il y a $m \geq 1$ joueur(s) gagnant(s), le gain de chacun de ces joueurs est de $\frac{n}{m}$.

Partie 1 : Calcul de l'espérance du gain d'un joueur

On numérote les joueurs de 1 à n . Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note :

- Y_k la variable qui vaut 1 si le joueur k a gagné et 0 sinon.
- X_k le gain, en euros, du joueur k .
- $N = \sum_{k=1}^n Y_k$ le nombre de gagnants.
- $S = \sum_{k=1}^n X_k$ le somme des gains des joueurs, en euros.

1. Donner la loi de Y_k pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
2. Donner la loi de N et préciser son espérance.
3. Montrer que $S(\Omega) = \{0, n\}$. Préciser la loi et l'espérance de S .
4. En déduire directement la valeur de $\mathbb{E}(X_k)$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
5. Un nouvel ami arrive dans le groupe. Est-ce que cela est favorable au gain de chaque joueur ?

Partie 2 : Etude de la variable X_k

On fixe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On note $A = N - Y_k$.

6. Déterminer $\mathbb{P}(X_k = 0)$.
7. Déterminer la loi de A . Montrer que A et Y_k sont indépendantes.
8. Montrer que, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $\mathbb{P}\left(X_k = \frac{n}{i}\right) = \frac{1}{2} \mathbb{P}_{(Y_k=1)}(N = i) = \binom{n-1}{i-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
9. Retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X_k)$, déjà calculée, à l'aide de la définition.
10. Les variables X_k et X_j sont-elles indépendantes ?

Partie 3 : le match retour

Après ce premier pari, les gagnants se retrouvent et parient sur un nouveau match indépendant du premier. Chaque joueur parie 1 euro. Les gagnants se partagent alors équitablement la mise totale, c'est-à-dire N euros. On note :

- Z_k le gain du joueur k lors du second pari. On convient que $Z_k = 0$ pour les joueurs ne participant pas à ce match retour.
 - $T = \sum_{k=1}^n Z_k$ la somme des gains du deuxième pari.
10. Déterminer $T(\Omega)$.
 11. Pour $i \in N(\Omega)$ et $j \in T(\Omega)$. Déterminer la valeur de $\mathbb{P}_{(N=i)}(T = j)$.
 12. Déterminer la loi et l'espérance de T .
 13. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(Z_k)$.
 14. Le joueur k a-t-il intérêt à parier sur ce second match ?