

Supplémentaires liée à la division euclidienne

Soit $D(X) \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant de degré $n \in \mathbb{N}^*$.

On définit $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } D \text{ divise } P\}$.

Montrer que $\mathbb{R}[X] = F \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

1. On commence par montrer que F est un sous- $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Il est non vide car $0 = D \times 0$ donc $0 \in F$.

Soit $P_1, P_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\begin{cases} P_1 = D \times Q_1 \\ P_2 = D \times Q_2 \end{cases}$.

Ainsi $P_1 + \lambda P_2 = D \times (Q_1 + \lambda Q_2) \in F$. Donc F est stable par combinaison linéaire.

2. Somme directe : $F \cap \mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \{0\}$.

Soit $P \in F \cap \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On peut écrire $P = DQ$.

Donc $\deg(P) = \deg(D) + \deg(Q) \geq n$ si $Q \neq 0$.

Or $\deg(P) \neq (n-1) < n$. Donc $Q = 0$ puis $P = 0$.

3. Somme totale : $\mathbb{R}[X] \subset F + \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Il existe une unique division euclidienne de P par D .

Elle s'écrit $P = QD + R$ avec $QD \in F$ et $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ car $\deg(R) < \deg(D) = n$.

4. Conclusion On a $\mathbb{R}[X] = F \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Différence entre $\mathbb{R}$ -ev et $\mathbb{C}$ -ev

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, déterminer si les ensembles suivants sont des $\mathbb{K}$ -espaces-vectoriels :

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \text{ tel que } 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz + 2yz = 0\}$.
2. $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x) - f(2-x)\}$.
3. $\{(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } \bar{z}_1 + z_2 = 0\}$.

1. On commence par réécrire $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz + 2yz = (x+y+z)^2 + (x^2 + y^2 - 2xy) = (x+y+z)^2 + (x-y)^2$.

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz + 2yz = 0$ ssi $(x+y+z=0 \text{ et } x-y=0)$

ssi $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ -2x \end{pmatrix}$. Donc cet ensemble est l'espace vectoriel engendré $\text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz + 2yz = [(x+y+z) + i(x-y)][(x+y+z) - i(x-y)] = 0$ ssi $((x+y+z) + i(x-y) = 0 \text{ ou } (x+y+z) - i(x-y) = 0)$.

Donc cet ensemble est l'union de deux espaces vectoriels donc ce n'est pas un $\mathbb{C}$ -ev. Plus précisément, $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs vérifiant la condition. Pourtant

$u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne vérifie pas la condition.

2. Dans les deux cas, l'ensemble est un $\mathbb{K}$ -ev.

Non vide car $f_0 : x \mapsto 0$ vérifie $f_0(x^2) = f_0(x) - f_0(2-x)$.

Stable par CL Soit $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ vérifiant la condition. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $(f_1 + \lambda f_2)(x^2) = f_1(x^2) + \lambda f_2(x^2) = f_1(x) - f_1(2-x) + \lambda[f_2(x) - f_2(2-x)] = (f_1 + \lambda f_2)(x) - (f_1 + \lambda f_2)(2-x)$. Donc $(f_1 + \lambda f_2)$ vérifie également la condition.

3. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a $\{(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } \bar{z}_1 + z_2 = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ x_2 + iy_2 \end{pmatrix} \text{ tel que } x_1 - iy_1 + x_2 + iy_2 = 0 \right\}$

Donc la condition devient $x_1 + x_2 = 0$ et $y_1 - y_2 = 0$. Puis $u = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ -x_1 + iy_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}$. Donc cet ensemble est l'espace vectoriel engendré $\text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \right\}$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors on a vu que $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est dans cet ensemble. Pourtant $iu = \begin{pmatrix} i \\ -i \end{pmatrix}$ n'est pas dans l'ensemble. Donc ce n'est pas un $\mathbb{C}$ -ev.