

Les espaces vectoriels

Révision de la semaine 22

Les espaces de dimension finie

Définition de la dimension

Théorème de la base extraite.

Théorème de la base incomplète.

Toutes les bases ont même nombre de vecteurs.

Caractérisation des bases comme les familles vérifiant deux des trois propriétés : libre, génératrice et nombre de vecteurs.

Rang d'une famille de vecteurs

Définition et lien pour le calcul avec le rang de la matrice des coordonnées.

Rang d'une famille libre.

Rang d'une famille génératrice.

Supplémentaires en dimension finie

Existence des supplémentaires dans un espace de dimension fini.

Caractérisation des sous-espace supplémentaires F et G d'un espace E de dimension finie comme vérifiant deux des trois propriétés :

$F \cap G = \{0\}$, $F + G = E$ et $\dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} G = \dim_{\mathbb{K}} E$.

Formule de Grassmann.

Liste de Questions de cours :

- a) Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = F_P \oplus F_I$ avec F_P les fonctions paires et F_I les fonctions impaires.
- b) Montrer qu'une famille de polynômes échelonnés en degré est libre.
- c) Montrer que si $\mathcal{B}_1$ est une base de F_1 , $\mathcal{B}_2$ est une base de F_2 et $E = F_1 \oplus F_2$ alors $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E .
- d) Énoncer et démontrer la caractérisation des bases à l'aide de la dimension. (Thm 1.5)
- e) Énoncer et démontrer les majorations connues sur le rang d'une famille. (Prop 2.2)
- f) Énoncer et démontrer la formule de Grassmann.

Exercices d'Application du Cours

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que $\left\{ \frac{(X-\alpha)^k}{k!} \right\}_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ à l'aide du thm de la caractérisation des bases.
2. On note $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } P(0) = P'(1) = 0\}$ et $G = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(X^2 - 2X, 2X^3 - 3X^2)$. Montrer que $F = G$ à l'aide du thm de caractérisation des égalités.
3. Soit $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 - \{0_E\}$ un vecteur non nul. On note $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } ax + by + cz = 0 \right\}$ et $D = \text{Vect } u$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ à l'aide du thm de caractérisation des supplémentaires.
4. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n et $H_1 \neq H_2$ deux hyperplans (de dimension $n-1$) de E . Montrer que $H_1 + H_2 = E$. En déduire que $\dim(H_1 \cap H_2) = n-2$ avec la formule de Grassmann.

Devoir libre

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos x) = \cos(nx).$$

Montrer que $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Pour A et B deux espaces vectoriels quelconques, on considère leur produit :
 $E = A \times B = \{(a, b) \text{ pour } a \in A \text{ et } b \in B\}$.
On le munit des opérations naturelles :
 - Addition interne $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$.
 - Produit externe $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$.
 - (a) A l'aide de la définition, montrer que E est un espace vectoriel.
 - (b) On suppose que $\mathcal{L}_A = (a_1, \dots, a_n)$ et $\mathcal{L}_B = (b_1, \dots, b_p)$ sont des familles libres respectives des espaces A et B . Montrer que $\mathcal{L} = \{(a_1, 0_B), \dots, (a_n, 0_B), (0_A, b_1), \dots, (0_A, b_p)\}$ est une famille libre de vecteurs de E .
 - (c) En déduire que $\dim_{\mathbb{K}}(A \times B) = \dim_{\mathbb{K}} A + \dim_{\mathbb{K}} B$ en dimension finie.
 - (d) Calculer la dimension de $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ l'ensemble des matrices augmentées.