Semaine 24 - Du 6 au 10 Avril 2026

Les espaces de dimension finie

Révision de la semaine 23

Les applications linéaires

Généralités

Définitions et conditions minimales : $f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$.
L'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel.
Composition d'applications linéaires et distributivité des opérations.
Puissances et polynômes d'un endomorphisme de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.
$\mathrm{Ker}f$, $\mathrm{Im}f$ et l'image d'un sous-$\mathbb{K}$-espace-vectoriel sont des sous-$\mathbb{K}$-espace-vectoriel.
Lien entre l'injectivité (resp. la surjectivité) et les sous-espaces $\mathrm{Ker}f$ (resp. $\mathrm{Im}f$).

Définition d'un morphisme $\mathbb{K}$-linéaire

Construction par l'image d'une base.
Construction par la restriction à des espaces supplémentaires.
Définition des homothéties, des symétries et des projecteurs.
Caractérisation par $s^2 = id$ et par $p^2 = p$.

Isomorphismes entres espaces vectoriels

Définition d'isomorphisme, d'automorphisme et du groupe linéaire $GL(E)$.
Stabilité par composition et inverse. Caractérisation par l'image d'une base.
Caractérisation des isomorphismes $f : E \to F$ comme vérifiant deux des trois propriétés :
$\mathrm{Ker}f = \{0_E\}$, $\mathrm{Im}f = F$ et $\mathrm{dim}E = \mathrm{dim}F$.

Liste de Questions de cours :

a) Enoncer et démontrer la caractérisation des bases à l'aide de la dimension.(Thm 1.5)
b) Enoncer et démontrer les majorations connues sur le rang d'une famille.(Prop 2.2)
c) Enoncer et démontrer la formule de Grassmann.
d) Montrer que $\mathrm{Ker}f$ est un espace vectoriel et qu'il caractérise l'injectivité de f.
e) Montrer que $p^2 = p$ ssi p est le projecteur sur $\mathrm{Im}p$ le long de $\mathrm{Ker}p$.
f) En étudiant l'application $M \mapsto M^T$, montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercices d'Application du Cours

1. On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x+y \\ 2x+y-z \\ x-z \end{smallmatrix}\right)$.
   Montrer que f est $\mathbb{R}$-linéaire et calculer son noyau et son image.
2. On considère $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), P \mapsto \begin{pmatrix} P(0) & P(1) \\ P(-1) & P(0) \end{pmatrix}$.
   Montrer que f est $\mathbb{R}$-linéaire et calculer son noyau et son image.
3. On considère $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X], P \mapsto P'(0)X$.
   Montrer que φ est un projecteur et calculer ses espaces propres.
4. On considère $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x-2y \\ -y \\ 2x-2y-z \end{smallmatrix}\right)$.
   Montrer que s est une symétrie et calculer ses espaces propres.

Devoir libre

1. On considère $p : E \to E$ la projection sur E_1 le long de E_2.
   Montrer que $q = id_E - p$ est un projecteur et préciser ses espaces propres.
   Montrer que $s = 2p - id_E$ est une symétrie et préciser ses espaces propres.
2. On considère l'application $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P(X+1) - P(X)$.
   Rmq : C'est la dérivée discrète appliquée au polynôme.
   (a) Montrer que Δ est linéaire et calculer son noyau.
   (b) On considère Δ_n la restriction de Δ à $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que Δ_n défini bien un endomorphisme et préciser son noyau et son image.
   (c) En déduire que Δ est surjective.
   (d) Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$ il existe un unique $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\Delta P = Q$ et $P(0) = 0$.
   Ceci permet de créer une application $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], Q \mapsto P$ l'unique solution.
   Rmq : C'est l'unique primitive discrète qui s'annule en 0.
   (e) Montrer que f est une application linéaire. (non trivial !)
   (f) Montrer que $\Delta \circ f = id_{\mathbb{R}[X]}$ et que $p = f \circ \Delta$ est un projecteur dont on précisera les espaces propres.