

Projecteur et symétrie associé

On considère $p : E \rightarrow E$ la projection sur E_1 le long de E_2 .


Montrer que $q = id_E - p$ est un projecteur et préciser ses espaces propres.

Montrer que $s = 2p - id_E$ est une symétrie et préciser ses espaces propres.

1. On étudie $q = id_E - p$. C'est un endomorphisme par opération.
On a $(id_E - p)^2 = id_E - 2p + p^2$ d'après la FBN. Donc $q^2 = id_E - 2p + p = q$.
Soit $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2$ alors $p(x) = x_1$. Donc $q(x) = (x_1 + x_2) - x_1 = x_2$ est le projecteur sur E_2 le long de E_1 .
2. De même $s = 2p - id_E$ est linéaire par opération.
Puis $(2p - id_E)^2 = 4p^2 - 4p + id_E$ d'après la FBN. Donc $s^2 = 4p - 4p + id_E = id_E$
Pour $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2$, on a $s(x) = 2x_1 - (x_1 + x_2) = x_1 - x_2$. Donc s est la symétrie par rapport à E_1 le long de E_2 .

Dérivation discrète des polynômes

On considère l'application $\Delta : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que Δ est linéaire et calculer son noyau.
 2. On considère Δ_n la restriction de Δ à $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que Δ_n définit bien un endomorphisme et préciser son noyau et son image.
 3. En déduire que Δ est surjective.
 4. Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$ il existe un unique $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\Delta P = Q$ et $P(0) = 0$.
Ceci permet de créer une application $\nabla : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], Q \mapsto P$ l'unique solution.
Rmq : C'est l'unique primitive discrète qui s'annule en 0.
 5. Montrer que ∇ est une application linéaire. (non trivial!)
 6. Montrer que $\Delta \circ \nabla = id_{\mathbb{R}[X]}$ et que $p = \nabla \circ \Delta$ est un projecteur dont on précisera les espaces propres.
1. Soit $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\Delta(P_1 + \lambda P_2) = (P_1(X+1) + \lambda P_2(X+1)) - (P_1(X) + \lambda P_2(X)) = \Delta P_1 + \lambda \Delta P_2$. Donc Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
On a $P \in \text{Ker} \Delta$ ssi $P(X+1) - P(X) = 0$ ssi P est constant.
En effet, notons $Q(X) = P(X) - P(0)$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}, Q(n) = 0$ par récurrence immédiate. Ainsi $Q = 0$ car il admet une infinité de racines. Donc $P(X) = P(0)$ est constant.
Ainsi $\text{Ker} \Delta = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(1)$.
 2.  Seul la bonne définition est utile ici. Pour $f : E \rightarrow F$, il s'agit de montrer que pour tout $x \in E$ alors $f(x) \in F$.

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a $\deg(\Delta(P)) \leq \deg P \leq n$. Donc $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi Δ_n est bien définie. La linéarité est celle de la correspondance Δ et est déjà acquise.
On a $\text{Ker} \Delta_n = \text{Ker} \Delta \cap \mathbb{R}_n[X] = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(1)$.
Puis $\text{Im} \Delta_n = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(\Delta(1), \Delta(X), \dots, \Delta(X^n))$
 $= \text{Vect}_{\mathbb{R}}(0, 1, 2X + 1, \dots, nX^{n-1} + \dots) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
 3. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. On dispose de $q = \deg Q$. Donc $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour $n = q + 1$ et il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q = \Delta_n P = \Delta P \in \text{Im} \Delta$. Donc Δ est surjective car $\text{Im} \Delta = \mathbb{R}[X]$.

4. On fixe $Q \in \mathbb{R}[X]$. On recherche les solutions de l'équation linéaire : $\Delta P = Q$. On sait que $Q \in \text{Im}\Delta$. Donc il existe une solution particulière $P_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\Delta P_1 = Q$. Ainsi l'ensemble des solution est $S = P_1 + \text{Ker}\Delta = \{P_1 + \lambda \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R}\}$. On souhaite également la condition $P(0) = 0$ ceci impose $\lambda = -P_1(0)$. Donc $P(X) = P_1(X) - P_1(0)$ est l'unique solution du système.
5. Soit $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $P_1 = \nabla Q_1$ et $P_2 = \nabla Q_2$.
 On sait donc $\Delta P_1 = Q_1$ et $\Delta P_2 = Q_2$ avec $P_1(0) = P_2(0) = 0$.
 Ainsi $\Delta(P_1 + \lambda P_2) = Q_1 + \lambda Q_2$ avec $(P_1 + \lambda P_2)(0) = 0$.
 Ainsi $P_1 + \lambda P_2$ est l'unique solution trouvée. Donc $\nabla(Q_1 + \lambda Q_2) = P_1 + \lambda P_2 = \nabla Q_1 + \lambda \nabla Q_2$. Donc ∇ est un endomorphisme.



Δ et ∇ sont des réciproques partielles. La composée dans un sens est l'identité et dans l'autre sens on trouve toujours (au moins) un projecteur.

6.

- Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ vérifie $g \circ f = id_E$ alors on peut montrer que
- f est injective et g est surjective.
 - $p = f \circ g$ est le projecteur sur $\text{Im}f$ le long de $\text{Ker}g$.
 - $F = \text{Im}f \oplus \text{Ker}g$.

On sait que $\nabla Q = P$ ssi $\Delta P = Q$ et $P(0) = 0$.

Donc pour Q quelconque, $\Delta(\nabla Q) = Q$.

Par contre, $\nabla(\Delta P) = P$ que lorsque $P(0) = 0$.

Ainsi $\Delta \circ \nabla = Id$. Notons $p = \nabla \circ \Delta$. On a $p^2 = \nabla \circ (\Delta \circ \nabla) \circ \Delta = \nabla \circ Id \circ \Delta = p$.

Donc p est un projecteur.

Puis $\text{Ker}p = \text{Ker}\Delta = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(1)$ les polynômes constants.

Et $\text{Im}p = \text{Im}\nabla = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P(0) = 0\}$ l'hyperplan des polynômes s'annulant en 0.