Semaine 25 - Du 13 au 17 Avril 2026

Les applications linéaires

Révision de la semaine 24

Rang d'une application

Définition des application de rang finie $f : E \to F$ et $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$.
Si F est de dimension finie $\text{rg}(f) \leq \dim(F)$ avec égalité ssi f surjective.
Si E est de dimension finie $\text{rg}(f) \leq \dim(E)$ avec égalité ssi f injective.
Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E alors $\text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), ..., f(e_n))$.
Théorème du rang pour $f : E \to F$ avec E de dimension finie.

Correspondance entre applications linéaires et matrices

Noyau, image et rang d'une matrice

Application linéaire canoniquement associée à une matrice.
Définitions des noyau, image et rang comme ceux de l'application associée.
Théorème du rang. Caractérisation des matrices inversibles.

Généralités

Matrice d'une application linéaire dans des bases.
L'application $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) \to \mathcal{M}_{\dim(F),\dim(E)}(\mathbb{K}), f \mapsto Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ est un isomorphisme.
Formule entre composition des morphismes et produit des matrices associées.
Une application est un isomorphisme ssi sa matrice est inversible.

Liste de Questions de cours :

a) Montrer que $\text{Ker}f$ est un espace vectoriel et qu'il caractérise l'injectivité de f.
b) Montrer que $p^2 = p$ ssi p est le projecteur sur $\text{Im}p$ le long de $\text{Ker}p$.
c) En étudiant l'application $M \mapsto M^T$, montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
d) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui passe par $n + 1$ points fixés i.e. $\forall i \in [\![0, n]\!], P(a_i) = b_i$ avec $a_0, ..., a_n$ distincts et $b_0, ..., b_n$ quelconques.
e) Pour $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $\mathcal{B}_E$ une base de E. Montrer que f est injective ssi $f(\mathcal{B}_E)$ est libre.
f) Enoncer et démontrer le théorème du rang.

Exercices d'Application du Cours

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P(X) \mapsto P(1) + P(0)X + P(-1)X^2$.
   Montrer que φ est de rang fini et préciser son rang.
2. Soit $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer le rang de φ et en déduire que c'est un automorphisme.
   (b) Calculer φ^3 en déduire φ^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
3. Soit $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \\ x-y+z \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que s est un symétrie vectorielle.
   (b) Déterminer les espaces propres de cette symétrie.
   (c) Caractériser l'application $p = \frac{1}{2}\left(id_{\mathbb{R}^3} + s\right)$.
   (d) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $(id_{\mathbb{R}^3} + s)^n$.

Devoir libre

1. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}f \subset \mathrm{Ker}f^2$ et $\mathrm{Im}f^2 \subset \mathrm{Im}f$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}f^2$ ssi $\mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f = \{0_E\}$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f^2$ ssi $\mathrm{Ker}f + \mathrm{Im}f = E$.
   (d) Si E est de dimension finie, montrer que $\mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f^2$ ssi $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}f^2$.
2. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et on considère $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), M \mapsto AM - MA$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme.
   (b) Calculer $\mathrm{Im}f$ et en déduire le rang de l'application.
   (c) Montrer que la famille (I_2, A, A^2) est liée mais que (I_2, A) est libre.
   (d) En déduire que (I_2, A) est une base de $\mathrm{Ker}f$.
   (e) Montrer que B commute avec A ssi il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $B = P(A)$.