

Semaine 26 et 27 - Du 4 au 22 Mai 2026

Questions de cours

1. Énoncer puis démontrer la formule de somme des carrés : $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Énoncer puis démontrer la formule de factorisation : $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.
3. Montrer que $\forall 0 \leq p \leq n, \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
4. Énoncer puis démontrer l'inégalité triangulaire : $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
5. Calculer la valeur de $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
6. Résoudre sur \mathbb{C} l'équation $\exp(z) = 3 - i\sqrt{3}$.
7. Résoudre sur \mathbb{C} l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
8. Montrer que la fonction sinus est dérivable sur \mathbb{R} en admettant $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.
9. Énoncer puis démontrer la formule de la dérivée d'un produit.
10. En tant que bijection réciproque, démontrer que la fonction Arcsin est dérivable sur $] - 1, 1[$ et calculer sa dérivée.
11. Énoncer puis démontrer la Formule de Leibniz.
12. Énoncer puis démontrer le caractère C^n d'une bijection réciproque.
13. Montrer que th réalise une bijection de \mathbb{R} vers $] - 1, 1[$. En calculant sa dérivée, montrer que $\operatorname{th}^{-1}(y) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right)$.
14. Énoncer et démontrer la formule d'intégration par parties puis calculer $\int_0^x \operatorname{Arctan}(t) dt$.
15. Énoncer et démontrer la formule de changement de variables puis calculer $\int_0^x \frac{1}{1+e^t} dt$.
16. Énoncer et démontrer les solutions homogènes d'une EDL1 à coefficients non constants.
17. Énoncer et démontrer les solutions homogènes d'une EDL2 à coefficients constants sur \mathbb{C} .
18. Déterminer les bornes supérieure et inférieure de $A = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \text{ pour } p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$.
19. Montrer que si A est un convexe majoré sans maximum et minoré avec minimum alors $A = [\min A, \sup A[$.
20. Démontrer l'unicité de la limite d'une suite.
21. Démontrer limite d'une combinaison linéaire de deux suites (cas limites finies).
22. Énoncer puis démontrer le théorème de limite monotone pour les suites.
23. Démontrer l'équivalence $(z_n \rightarrow l \in \mathbb{C})$ ssi $(\operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(l))$ et $(\operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(l))$.
24. Énoncer et démontrer le résultat de composée des limites.
25. Énoncer puis démontrer le théorème d'encadrement pour les fonctions.
26. Trouver les fonctions f continue en 0 telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$.
27. Trouver les fonctions f continue sur \mathbb{R} telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$.
28. Énoncer puis démontrer le Théorème des Valeurs Intermédiaires sur un segment $[a, b]$.
29. Énoncer puis démontrer le Théorème de Rolle (sans utiliser le TAF).
30. Énoncer puis démontrer le Théorème des accroissements finis.
31. Énoncer et démontrer le résultat de prolongement de la dérivabilité.
32. Énoncer et démontrer l'associativité et la distributivité du produit matriciel.
33. Démontrer que pour $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), M^{a+b} = M^a M^b$ et $M^{ab} = (M^a)^b$.
34. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton pour deux matrices qui commutent.
35. Démontrer la stabilité des matrices triangulaires par les opérations.
36. Calculer les puissances de $A = 2In + B$ avec $B^2 = In$.
37. Énoncer et démontrer les formules $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ et $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.
38. Montrer que l'équivalence par lignes est une relation d'équivalence.
39. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $X \neq 0$ vérifiant $AX = \lambda X$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
40. Programmer en Python l'algorithme d'Euclide et démontrer sa terminaison et sa validité.

41. Démontrer que $\text{Card}(A \uplus B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$ pour A et B disjoints.
42. Démontrer que $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A)\text{Card}(B)$.
43. Démontrer la caractérisation des bijections :
 $f : A \rightarrow B$ bijective ssi deux des trois f injective, f surjective, $\text{Card } A = \text{Card } B$.
44. Démontrer avec le dénombrement que $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et $\binom{n}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
45. Énoncer et démontrer la formule des probabilités composées pour n événements.
46. Énoncer et démontrer la formule des probabilités totales.
47. Montrer que l'espérance est linéaire et croissante.
48. Soit $D_1 \sim D_2 \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$ deux V.A. indépendantes.
Calculer la loi et l'espérance de $X = \max(D_1, D_2)$.
49. Soit $D_1 \sim D_2 \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$ deux V.A. indépendantes.
Calculer la loi et l'espérance de $S = D_1 + D_2$.
50. Définir $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ puis calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
51. Définir $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ puis calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
52. Montrer que si $X_k \sim \mathcal{B}(p)$ sont mutuellement indépendantes alors $S = \sum_{k=1}^n X_k \sim \mathcal{B}(n, p)$.
53. Démontrer que $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$.
54. En développant de deux manières $(X + 1)^{m_1+m_2}$, démontrer la formule de Vandermonde.
55. Factoriser le polynôme $X^n - 1$ sur $\mathbb{R}[X]$.
56. Démontrer la règle de Leibniz $(PQ)' = P'Q + PQ'$ avec la définition formelle.
57. Énoncer et démontrer le lien entre l'annulation des dérivées et la multiplicité d'une racine.
58. Énoncer et démontrer la formule de Taylor.
59. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = F_P \oplus F_I$ avec F_P les fonctions paires et F_I les fonctions impaires.
60. Montrer qu'une famille de polynômes échelonnés en degré est libre.
61. Montrer que si \mathcal{B}_1 est une base de F_1 , \mathcal{B}_2 est une base de F_2 et $E = F_1 \oplus F_2$ alors $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E .
62. Énoncer et démontrer la caractérisation des bases à l'aide de la dimension. (Thm 1.5)
63. Énoncer et démontrer les majorations connues sur le rang d'une famille. (Prop 2.2)
64. Énoncer et démontrer la formule de Grassmann.
65. Montrer que $\text{Ker } f$ est un espace vectoriel et qu'il caractérise l'injectivité de f .
66. Montrer que $p^2 = p$ ssi p est le projecteur sur Imp le long de $\text{Ker } p$.
67. En étudiant l'application $M \mapsto M^T$, montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
68. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui passe par $n + 1$ points fixés i.e. $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_i) = b_i$ avec a_0, \dots, a_n distincts et b_0, \dots, b_n quelconques.
69. Pour $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et \mathcal{B}_E une base de E . Montrer que f est injective ssi $f(\mathcal{B}_E)$ est libre.
70. Énoncer et démontrer le théorème du rang.
71. Montrer que $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{\dim(F), \dim(E)}(\mathbb{K}), \varphi \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi)$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.
72. Montrer que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g)\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$.

Méthode de cours

1. Résoudre une EDL1 à coefficients non constants.
2. Résoudre une EDL2 à coefficients constants.
3. Déterminer l'expression explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
4. Étudier une suite autonome $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in I$ un intervalle stable.
5. Inverser une matrice à l'aide de l'algorithme du Pivot de Gauss-Jordan.
6. Calculer A^n à l'aide d'un polynôme annulateur $\chi(A) = 0$.
7. Résoudre une équation diophantienne linéaire avec les thm de Bézout et de Gauss.
8. Factoriser un polynôme sur $\mathbb{R}[X]$ à l'aide des racines complexes et de leurs multiplicités.
9. Calculer un projecteur (ou une symétrie) associé à des espaces-propres donnés $E = E_1 \oplus E_2$.