

Manipulation abstraite de noyaux et d'images

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$.

1. Montrer que $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$ et $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$.
2. Montrer que $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$ ssi $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$.
3. Montrer que $\text{Im } f = \text{Im } f^2$ ssi $\text{Ker } f + \text{Im } f = E$.
4. Si E est de dimension finie, montrer que $\text{Im } f = \text{Im } f^2$ ssi $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.

1. $\boxed{\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2}$

Soit $x \in \text{Ker } f$. Donc $f^2(x) = f(f(x)) = f(0_E) = 0_E$ donc $x \in \text{Ker } f^2$.

- $\boxed{\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f}$

Soit $y = f^2(x) \in \text{Im } f^2$. Donc $y = f^2(x) = f(f(x)) \in \text{Im } f$.

2. $\boxed{\Rightarrow}$ Montrons que $\text{Ker } f \cap \text{Im } f \subset \{0_E\}$. L'autre inclusion est Triviale.

Soit $x \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$.

On peut écrire $x = f(x')$ car $x \in \text{Im } f$.

Donc $0_E = f(x) = f^2(x')$ car $x \in \text{Ker } f$.

Ainsi $x' \in \text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$. Donc $x = f(x') = 0_E$.

- $\boxed{\Leftarrow}$ Montrons que $\text{Ker } f^2 \subset \text{Ker } f$. L'autre inclusion est donnée par le 1.

Soit $x \in \text{Ker } f^2$. Alors $f(x) \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$ car $f(f(x)) = 0_E$.

Donc $f(x) = 0_E$ par hypothèse puis $x \in \text{Ker } f$.

3. $\boxed{\Rightarrow}$ Montrons que $E \subset \text{Ker } f + \text{Im } f$. L'autre inclusion est Triviale.

Soit $x \in E$. On a $f(x) \in \text{Im } f = \text{Im } f^2$. Donc il existe $x' \in E$ tel que $f(x) = f^2(x')$.

On peut écrire $x = [x - f(x')] + f(x') \in \text{Ker } f + \text{Im } f$ car $f[x - f(x')] = f(x) - f^2(x') = 0_E$.

- $\boxed{\Leftarrow}$ Montrons que $\text{Im } f \subset \text{Im } f^2$. L'autre inclusion est donnée par le 1.

Soit $y = f(x) \in \text{Im } f$. Alors $x = x_0 + f(x') \in E = \text{Ker } f + \text{Im } f$.

Donc $y = f(x_0 + f(x')) = f(x_0) + f^2(x') = f^2(x') \in \text{Im } f^2$ car $f(x_0) = 0_E$.

4. Si E est de dimension finie alors on peut appliquer le théorème du rang et en déduire que :

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f.$$

Donc par caractérisation des supplémentaires :

$$\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = E \text{ ssi } \text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\} \text{ ssi } \text{Ker } f \oplus \text{Im } f = E$$

Avec les questions 2. et 3., on en déduit bien :

$$\text{Im } f = \text{Im } f^2 \text{ ssi } \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$$


Commutant d'une matrice

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et on considère $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), M \mapsto AM - MA$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Calculer $\text{Im}f$ et en déduire le rang de l'application.
3. Montrer que la famille (I_2, A, A^2) est liée mais que (I_2, A) est libre.
4. En déduire que (I_2, A) est une base de $\text{Ker}f$.
5. Montrer que B commute avec A ssi il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $B = P(A)$.

1. L'application est bien définie car l'ensemble des matrices carrées $(2, 2)$ est stable par opérations.

On a $f(M_1 + \lambda M_2) = A(M_1 + \lambda M_2) - (M_1 + \lambda M_2)A = AM_1 - M_1A + \lambda(AM_2 - M_2A) = f(M_1) + \lambda f(M_2)$. Donc f est bien un endomorphisme.

2.  En dimension finie, $\text{Im}f = \text{Vect} f(\mathcal{B}_E)$ avec \mathcal{B}_E une base de l'espace de départ.

$$\text{On a } \text{Im}f = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{car } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\text{rg}f = \dim \text{Im}f = 2$.

3. On calcul $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 3A - I_2$. Ainsi la famille (I_2, A, A^2) est liée.

Puis I_2 et A sont non colinéaires. Donc la famille (I_2, A) est libre.

4.  En dimension finie, le théorème du rang donne $\dim \text{Ker}f = \dim E - \text{rg}f$.

On a $f(I_2) = A - A = 0$ et $f(A) = A^2 - A^2 = 0$ donc $\text{Vect}(I_2, A) \subset \text{Ker}f$.

Or d'après le théorème du rang $\dim \text{Ker}f = 2$. Donc par dimension $\text{Ker}f = \text{Vect}(I_2, A)$.

La famille (I_2, A) est libre donc il s'agit d'une base de $\text{Ker}f$.

5. On a $BA = AB$ ssi $f(B) = 0$ ssi $B \in \text{Ker}f$ ssi $\exists a, b \in \mathbb{R}, B = aI_2 + bA$.

Ceci démontre que si B commute avec A alors il existe un polynôme $P(X) = bX + a$ tel que $B = P(A)$.

La réciproque fait partie du cours sur les matrices. Si $B = P(A)$ alors B commute avec A .