

DS de Math n° 8 - Corrigé

Problème I : CCINP TSI 2020

1. (a) On a $f^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{4} f \begin{pmatrix} x+3y \\ 3x+y \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} (x+3y)+3(3x+y) \\ 3(x+3y)+(3x+y) \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 10x+6y \\ 6x+10y \end{pmatrix}$.
 Et $\frac{1}{2}(f + \text{id}_E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \begin{pmatrix} x+3y \\ 3x+y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5x+3y \\ 3x+5y \end{pmatrix}$.
 Donc $f^2 = \frac{1}{2}(f + \text{id}_E)$.
- (b) On a $u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1$ ssi $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} x+3y \\ 3x+y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 ssi $\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases}$ ssi $x = y$ ssi $u = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
 Donc $E_1 = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 De même $u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1$ ssi $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} x+3y \\ 3x+y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 ssi $\begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$ ssi $y = -x$ ssi $u = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
 Donc $E_2 = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
 La famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille de rang 2 de \mathbb{R}^2 . C'est donc une base de \mathbb{R}^2 .
 Puis $\mathbb{R}^2 = \text{Vect } \mathcal{B} = \text{Vect}(u_1) \oplus \text{Vect}(u_2) = E_1 \oplus E_2$.
- (c) On peut écrire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x-y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_1 \oplus E_2$.
 Donc $p \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1$.
2. (a) On a $f^2 = \frac{1}{2}(f + \text{id}_E)$. Donc $\text{id}_E = 2f^2 - f = (2f - \text{id}_E) \circ f$. Ainsi f est bijective et $f^{-1} = 2f - \text{id}_E$.
- (b) On a $p = \frac{1}{3}(2f + \text{id}_E)$ est bien un endomorphisme par opérations.
 Puis $p^2 = \frac{1}{9}(2f + \text{id}_E)^2 = \frac{1}{9}(4f^2 + 4f + \text{id}_E) = \frac{1}{9}(2f + 2\text{id}_E + 4f + \text{id}_E) = p$.
 Soit $u \in E$.
 On a $p(u) = 0$ ssi $2f(u) + u = 0$ ssi $f(u) + \frac{1}{2}u = 0$ ssi $u \in E_2$.
 On a $p(u) = u$ ssi $2f(u) + u = 3u$ ssi $f(u) - u = 0$ ssi $u \in E_1$.
 Donc p est le projecteur sur E_1 le long de E_2 .
- (c) D'après le cours pour un projecteur $E = \text{Imp} \oplus \text{Kerp} = E_1 \oplus E_2$.
- (d) A l'aide de la définition pour une application linéaire g et $\lambda \neq 0$.
 On a $\text{Im } g = \text{Im}(\lambda g)$ et $\text{Ker } g = \text{Ker}(\lambda g)$.
 Donc $\text{Im}(f + \frac{1}{2}\text{id}_E) = \text{Im} \frac{2}{3}(f + \frac{1}{2}\text{id}_E) = \text{Imp}$. Et $\text{Ker}(f + \frac{1}{2}\text{id}_E) = \text{Kerp}$.
 De même $\text{Im}(f - \text{id}_E) = \text{Im} \frac{1}{3}(f - \text{id}_E) = \text{Im}(p - \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(f - \text{id}_E) = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$.
 Or $\text{Imp} = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$ sont les vecteurs invariants.
 Donc $\text{Im}(f + \frac{1}{2}\text{id}_E) = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$.
 De même $\text{Kerp} = \text{Im}(p - \text{id}_E)$ à l'aide du projecteur associé $q = \text{id}_E - p$.
 Donc $\text{Ker}(f + \frac{1}{2}\text{id}_E) = \text{Im}(f - \text{id}_E)$
- (e) Plusieurs méthodes possibles :
- Méthode 1 : On montre la relation par récurrence sur n .
 On trouve $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + b_n \end{cases}$ et $\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_{n+1} = \frac{a_n}{2} \end{cases}$.
 Puis $a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n$ est une suite récurrence linéaire d'ordre 2.
 Les racines de $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$ sont 1 et $-\frac{1}{2}$. Donc $a_n = \lambda_1 1^n + \lambda_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Les conditions $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ donne alors $\lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{2}{3}$.
 Ainsi $a_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ puis $b_n = \frac{a_{n-1}}{2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Méthode 2 : A l'aide de la formule du Binôme avec $p^2 = p$ donc $p^n = \begin{cases} \text{id}_E & \text{si } n = 0 \\ p & \text{sinon} \end{cases}$.

On a $f = \frac{3}{2}p - \frac{1}{2}\text{id}_E$ par définition de p .

Donc $f^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (3p)^k (-\text{id}_E)^{n-k} = \frac{1}{2^n} ((-1)^n \text{id}_E + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^k (-1)^{n-k} p)$
 $= \frac{1}{2^n} ((-1)^n \text{id}_E + (2^n - (-1)^n) p) = \left(\frac{-1}{2}\right)^n \text{id}_E + \left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \frac{2}{3} (f + \frac{1}{2} \text{id}_E) = a_n f + b_n \text{id}_E$.

avec $a_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{-1}{2}\right)^n$ et $b_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{-1}{2}\right)^n$.

(f) On a $\left(\frac{-1}{2}\right)^n \rightarrow 0$ donc $a_n \rightarrow \frac{2}{3}$ et $b_n \rightarrow \frac{1}{3}$.

Donc $f^n = a_n f + b_n \text{id}_E \rightarrow \frac{2}{3} f + \frac{1}{3} \text{id}_E = p$.

Ainsi cette suite d'endomorphismes tend vers le projecteur p .

Problème II : CCINP TSI 2025

1. (a) On a $s(1) = s(X^0) = X^{2n}$, $s(X^n) = X^n$ et $s(X^{2n}) = X^0 = 1$.
- (b) L'application est bien définie car si $\deg(Q) \leq 2n$ alors $\deg(s(Q)) \leq 2n$ par construction.
 Soit $Q_1(X) = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ et $Q_2(X) = \sum_{k=0}^{2n} b_k X^k$ deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}$.
 On a $Q_1 + \lambda Q_2 = \sum_{k=0}^{2n} (a_k + \lambda b_k) X^k$
 donc $s(Q_1 + \lambda Q_2) = \sum_{k=0}^{2n} (a_{2n-k} + \lambda b_{2n-k}) X^k = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k + \lambda \sum_{k=0}^{2n} b_{2n-k} X^k$
 $= s(Q_1) + \lambda s(Q_2)$.
 Donc s est un endomorphisme de E .
- (c) On a $s(s(Q)) = s\left(\sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k\right) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-(2n-k)} X^k = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k = Q$.
 Donc s est une symétrie vectorielle.

2. (a) On a $s(1) = X^2$, $s(X) = X$ et $s(X^2) = 1$. Donc la matrice est $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- (b) On peut calculer le noyau $\text{Ker}(S - I_3)$ pour déterminer les invariants.

$$S - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $E_1 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B \right\} = \text{Vect}(1 + X^2, X)$.

Le noyau $\text{Ker}(S + I_3)$ détermine les contravariants.

$$S + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $E_2 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_B \right\} = \text{Vect}(1 - X^2)$.

3. (a) On traite les 3 cas. Si $k < n$ alors $s(P_k) = X^k + X^{2n-k} = P_k$.
 Si $k = n$ alors $s(P_n) = X^n = P_n$.
 Si $k > n$ alors $s(P_k) = X^{2n-k} - X^k = -P_k$.
- (b) Pour $k < n$ alors $\deg(P_k) = 2n - k$ et $\deg(P_n) = n$. Donc les polynômes de la famille $\mathcal{L}_1 = (P_0, \dots, P_n)$ sont strictement décroissant en degré. Quitte à les réordonner, ils sont échelonnés en degré donc libre.
 De même, si $k > n$, $\deg(P_k) = k$ est désormais strictement croissant. Donc $\mathcal{L}_2 = (P_{n+1}, \dots, P_{2n})$ est libre car échelonnée en degré.
- (c) Notons $F_1 = \text{Vect}(\mathcal{L}_1)$ et $F_2 = \text{Vect}(\mathcal{L}_2)$.
 On sait que $\forall Q \in F_1, s(Q) = Q$ car $s(P_k) = P_k$ si $k \leq n$.

De même $\forall Q \in F_2, s(Q) = -Q$ car $s(P_k) = -P_k$ si $k > n$.

Puis $\dim(F_1) = n + 1$ car la famille \mathcal{L}_1 est libre et de même $\dim(F_2) = n$.

Si l'on note E_1 et E_2 les espaces propres de s . On sait que $E = E_1 \oplus E_2, F_1 \subset E_1$ et $F_2 \subset E_2$.

Donc $F_1 \cap F_2 \subset E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$. Les espaces F_1 et F_2 sont en sommes directes.

Puis $\dim(F_1) + \dim(F_2) = 2n + 1 = \dim(E)$. Par caractérisation, $E = F_1 \oplus F_2$.

On en déduit que $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ est une base de E . Puis que $E_1 = F_1$ et $E_2 = F_2$ sont les espaces propres de s par dimension.

Problème III : 1. **Construction d'une base cyclique.**

- (a) On a $\text{Card}(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)) = n = \dim E$ et la famille est libre. Donc c'est une base de E .
- (b) On a $u^n(x) \in E$. Donc il existe des uniques coordonnées sur la base $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$.

$$\text{Ainsi } u^n(x) = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = a_0x + a_1u(x) + \dots + a_{n-1}u^{n-1}(x).$$

- (c) On a $u^k(x) \in E = \text{Vect}(\mathcal{B})$ car la famille \mathcal{B} est génératrice de E .
- (d) On montre que la relation est vraie pour les vecteurs de la base \mathcal{B} .

$$\begin{aligned} \text{Soit } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket. \text{ Pour } y_k = u^k(x), \\ \text{on a } u^n(y_k) &= u^n(u^k(x)) = u^k(u^n(x)) \\ &= u^k(a_0x + a_1u(x) + \dots + a_{n-1}u^{n-1}(x)) \\ &= a_0u^k(x) + a_1u^{k+1}(x) + \dots + a_{n-1}u^{k+n-1}(x) \\ &= a_0u^k(x) + a_1u(u^k(x)) + \dots + a_{n-1}u^{n-1}(u^k(x)) \\ &= a_0y_k + a_1u(y_k) + \dots + a_{n-1}u^{n-1}(y_k). \end{aligned}$$

Puis on l'étend par linéarité. Pour $y \in E$ quelconque, on peut l'écrire $y = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k y_k$ car $\mathcal{B} = (y_0, \dots, y_{n-1})$ est une base de E .

$$\begin{aligned} \text{Donc } u^n(y) &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^n(y_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (a_0y_k + a_1u(y_k) + \dots + a_{n-1}u^{n-1}(y_k)) \\ &= a_0 \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k y_k + a_1 \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u(y_k) + \dots + a_{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^{n-1}(y_k) \\ &= a_0y + a_1u(y) + \dots + a_{n-1}u^{n-1}(y). \end{aligned}$$

- (e) On a $u(y_k) = y_{k+1}$ par construction si $k < n-1$. Puis $u(y_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k y_k$
Donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

2. Etude d'un exemple.

- (a) On a $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u^2(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{On peut calculer le rang de la famille } \text{rg}(\mathcal{B}) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Donc \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 .

- (b) D'après ce qui précède, on calcul $u^3(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Donc $a_0 = 0, a_1 = 1$ et $a_2 = 0$ conviennent.

- (c) On a $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d'après ce qui précède.

$$\text{Puis } B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ par calcul.}$$

(d) On a $B^2 = B$ par calcul. Donc p est un projecteur.

Noyau $\text{Ker}(B)$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

$$\text{Donc } \text{Ker}p = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{B}} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Image } \text{Im}(B) &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \right\} \\ &= \text{Vect}(u(e_1), u(e_2)) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$