Devoir Surveillé de Mathématiques n° 8
le samedi 18 Avril 2026 - durée 4h

Problème I : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

On étudie les applications linéaires $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ vérifiant la relation $f^2 = \frac{1}{2}(f + \mathrm{id}_E)$.

On pose $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}\mathrm{id}_E)$.

1. On commence par étudier un exemple.
   On suppose dans cette question uniquement que $E = \mathbb{R}^2$ et $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{4}\left(\begin{smallmatrix} x+3y \\ 3x+y \end{smallmatrix}\right)$.
   (a) Montrer que f vérifie bien la relation $f^2 = \frac{1}{2}(f + \mathrm{id}_E)$.
   (b) Déterminer des base $\mathcal{B}_1$ de E_1 et $\mathcal{B}_2$ de E_2.
   (c) En déduire que $\mathbb{R}^2 = E_1 \oplus E_2$ et préciser une base de E compatible à cette décomposition.
   (d) Calculer l'image $p\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ par le projecteur sur E_1 le long de E_2.
2. On revient au cas général.
   (a) Montrer que f est un automorphisme et que $f^{-1} = \alpha f + \beta \mathrm{id}_E$ avec des constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ que l'on précisera.
   (b) On pose $p = \frac{1}{3}(2f + \mathrm{id}_E)$.
   Montrer que p est un projecteur et déterminer ses espaces propres.
   (c) Montrer que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E.
   (d) Montrer que $\mathrm{Im}(f + \frac{1}{2}\mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et que $\mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}\mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$.
   (e) Montrer qu'ils existent des suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ telles que $f^n = a_n f + b_n \mathrm{id}_E$.
   Préciser les expressions de ces suites en fonction de n.
   (f) Montrer que les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ admettent des limites finies et en déduire la limite de f^n lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème II : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$. Pour $Q(X) = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$, on définit :

$$s(Q) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k$$

Par exemple, si $n = 2$ et $Q = 7X^3 + 2X^2 + 1$ alors $s(Q) = X^4 + 2X^2 + 7X$.

1. (a) Calculer $s(1), s(X^n)$ et $s(X^{2n})$.
   (b) Montrer que s est un endomorphisme de E.
   (c) Montrer que s est une symétrie vectorielle.
2. On traite ici le cas $n = 2$.
   (a) Déterminer la matrice S de s dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Déterminer les espaces propres de la symétrie s.
3. On revient au cas général. On définit la famille de polynôme $\mathcal{F} = (P_0, ..., P_{2n})$ par :

$$P_k = \begin{cases} X^{2n-k} + X^k & \text{si } k < n \\ X^n & \text{si } k = n \\ X^k - X^{2n-k} & \text{si } k > n \end{cases}$$

   (a) Calculer $s(P_k)$ pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$.
   (b) Montrer que $\mathcal{L}_1 = (P_0, .., P_n)$ et $\mathcal{L}_2 = (P_{n+1}, ..., P_{2n})$ sont des familles libres.
   (c) Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de E et en déduire les espaces propres de s.

Problème III : Soit E est un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$.

1. **Construction d'une base cyclique**.
   On suppose qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille : $(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est libre.

   (a) Montrer que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.

   (b) Montrer qu'il existe des scalaires $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ tels que :

   $$u^n(x) = a_0 x + a_1 u(x) + \cdots + a_{n-1} u^{n-1}(x).$$

   (c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $u^k(x) \in \mathrm{Vect}(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$.

   (d) Montrer que, pour tout $y \in E$:

   $$u^n(y) = a_0 y + a_1 u(y) + \cdots + a_{n-1} u^{n-1}(y).$$

   (e) Écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = (x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$.

2. **Etude d'un exemple**.
   On traite ici l'exemple où $n = 3$ et $E = \mathbb{R}^3$.
   On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.
   On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), u^2(e_1))$ est une base de E.

   (b) Déterminer les scalaires (a_0, a_1, a_2) tels que : $u^3 = a_0 id_E + a_1 u + a_2 u^2$.

   (c) Écrire la matrice de u puis celle de $p = u^2$ dans la base $\mathcal{B}$.

   (d) Montrer que p est un projecteur et déterminer ses espaces propres.