DS de Maths n$^{\text{o}}$ 9 - Corrigé

1 Exercices

1. (a) On réalise des changements d'indices après avoir linéarisé l'expression :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}+\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}\\
&=\left(1+\frac{1}{2}+H_n\right)-2\left(\frac{1}{2}+H_n+\frac{1}{n+1}\right)+\left(H_n+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Pour simplifier le calcul, on a noté $H_n=\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}$.

(b) On calcul la somme triangulaire à l'aide des formules :
$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i\leq j\leq n}(2i+1)&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}(2i+1)\\
&=\sum_{j=1}^{n}2\frac{j(j+1)}{2}+j=\sum_{j=1}^{n}j^2+2j\\
&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}
\end{aligned}$$

(c) Il s'agit d'un produit télescopique :
$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}=\frac{n+1}{1}=n+1$.

2. On calcul le discriminant de l'expression du second de degré :
$\Delta=[3(1+i)]^2-4.1.4i=9(0+2i)-16i=2i=2e^{i\pi/2}$.
On pose $\delta=\sqrt{2}e^{i\pi/4}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+i$ une racine carrée de Δ.
Les solutions de l'équation $z^2-3(1+i)z+4i=0$ sont donc :
$\frac{3(1+i)-\delta}{2}=1+i$ et $\frac{3(1+i)+\delta}{2}=2+2i$.

3. (a) On recherche $a>0$ se sorte que la loi soit bien définie et unitaire.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}\sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}(X=i\cap Y=j)&=\sum_{i=0}\sum_{j=0}^{n}a\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\\
&=a\sum_{i=0}\binom{n}{i}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-i}{j}=a\sum_{i=0}\binom{n}{i}2^{n-i}\\
&=a(1+2)^n=a3^n
\end{aligned}$$

Donc $a=3^{-n}>0$ convient.
De plus, on a $\mathbb{P}(X=i\cap Y=j)\geq 0$ de manière évidente.

Puis $\mathbb{P}(X=i\cap Y=j)\leq\sum_{i',j'}\mathbb{P}(X=i'\cap Y=j')=1$.
Donc $\mathbb{P}(X=i\cap Y=j)\in[0,1]$ montre que la loi est bien définie.

(b) Soit $i\in X(\Omega)=[\![1,n]\!]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=i)&=\sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}(X=i\cap Y=j)\\&=\sum_{j=0}^{n}3^{-n}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}=3^{-n}\binom{n}{i}2^{n-i}\\&=\binom{n}{i}\left(\frac{1}{3}\right)^{i}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-i}\end{aligned}$$

Ainsi X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,1/3)$.
Soit $j\in Y(\Omega)=[\![1,n]\!]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=j)&=\sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}(X=i\cap Y=j)\\&=\sum_{i=0}^{n}3^{-n}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}=3^{-n}\sum_{i=0}^{n-j}\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!}\\&=3^{-n}\binom{n}{j}\sum_{i=0}^{n-j}\frac{(n-j)!}{i!(n-i-j)!}=3^{-n}\binom{n}{j}2^{n-j}\\&=\binom{n}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{j}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-j}\end{aligned}$$

Ainsi Y suit également une loi binomiale $\mathcal{B}(n,1/3)$.
On en déduit que $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)=\frac{n}{3}$.

(c)

(d)

$$\mathbb{E}(XY)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}(X=i\cap Y=j)ij=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}ij$$

$$\begin{aligned}&=a\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}n\binom{n-1}{i-1}(n-i)\binom{n-i-1}{j-1}&&\text{par formule du capitaine}\\&=n3^{-n}\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}(n-i)\sum_{k=0}^{n-i-1}\binom{n-i-1}{k}&&\text{par changement d'indice}\\&=n3^{-n}\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{n-i}(n-i)2^{n-i-1}&&\text{par symétrie et FBN}\\&=n3^{-n}\sum_{i=1}^{n-1}(n-1)\binom{n-2}{n-i-1}2^{n-i-1}&&\text{par formule du capitaine}\\&=n(n-1)3^{-n}3^{n-2}=\frac{n(n-1)}{9}&&\text{par FBN.}\end{aligned}$$

Puis d'après Koening-Huygens, $\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{n(n-1)}{9}-\frac{n}{3}\frac{n}{3}=-\frac{n}{9}\neq 0$. Donc les variables ne sont pas décorrélées puis elles ne sont pas indépendantes.

4. On a $F_1=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 en tant qu'espace engendré.

De même $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -2y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ pour } y, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 en tant qu'espace engendré.
Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in F_1 \cap F_2$. Alors on a $\lambda + 2.0 + \lambda = 0$ donc $\lambda = 0$. Ainsi $\vec{u} = \vec{0}$ et la somme est directe.
Par caractérisation à l'aide de la dimension $\dim F_1 + \dim F_3 = \dim \mathbb{R}^3$, on en déduit que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$.

5. On commence par montrer que φ défini bien un endomorphisme idempotent.
<u>φ est bien définie</u> : Si $\deg P \leq 3$ alors $\deg \varphi(P) \leq 1$.
<u>φ est linéaire</u> : $\varphi(P_1 + \lambda P_2) = (P_1 + \lambda P_2)'(0)X = P_1'(0)X + \lambda P_2'(0) = \varphi(P_1) + \lambda\varphi(P_2)$.
<u>φ est idempotent</u> : $\varphi^2(P) = \varphi(Q) = Q'(0)X$ avec $Q(X) = P'(0)X$ donc $Q'(0) = P'(0)$. Ainsi $\varphi^2(P) = P'(0)X = \varphi(P)$.
On calcul les espaces propres du projecteur.
Notons $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ On a $P'(0) = c$. Donc $P \in \text{Ker}\varphi$ ssi $P'(0)X = 0$ ssi $c = 0$ ssi $P \in \text{Vect}_{\mathbb{R}}(1, X^2, X^3)$.
$\text{Im}\varphi = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3)) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(0, X, 0, 0) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(X)$.
Donc φ est le projecteur sur $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(X)$ le long de $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(1, X^2, X^3)$.

6. s est l'application linéaire canoniquement associé à la matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.
On a $S^2 = I_3$ donc s est une symétrie vectorielle par caractérisation.
On calcul les espaces propres de la symétrie.
D'une part $S - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
D'où $\begin{cases} x & = z \\ y & = 0 \\ z & \in \mathbb{R} \end{cases}$ puis $\text{Ker}(S - I_3) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
D'autre part $S + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
D'où $\begin{cases} x & = y \\ y & \in \mathbb{R} \\ z & \in \mathbb{R} \end{cases}$ puis $\text{Ker}(S + I_3) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

2 Problème : Marche aléatoire sur un cercle fini.

Étude du cas $n = 3$

1. D'après la formule des probabilité totale sur le SCEI $\{(X_k = 1), (X_k = 2), (X_k = 3)\}$, on a $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(X_k = i)\mathbb{P}_{(X_k=i)}(B)$ pour tout événement B.
Or l'énoncé se traduit pas $\mathbb{P}_{(X_k=i)}(X_{k+1} = j) = \begin{cases} p \text{ si } j = i + 1 (mod 3) \\ q \text{ si } j = i - 1 (mod 3) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.
Donc $\begin{cases} \mathbb{P}(X_{k+1} = 1) & = p\mathbb{P}(X_k = 3) + q\mathbb{P}(X_k = 2) \\ \mathbb{P}(X_{k+1} = 2) & = p\mathbb{P}(X_k = 1) + q\mathbb{P}(X_k = 3) \\ \mathbb{P}(X_{k+1} = 3) & = p\mathbb{P}(X_k = 2) + q\mathbb{P}(X_k = 1) \end{cases}$

Ce qui s'écrit matriciellement $U_{k+1} = AU_k$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & q & p \\ p & 0 & q \\ q & p & 0 \end{pmatrix}$.

2. (a) On a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Puis $A^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$.

   Donc $A^2 = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I_3$.

   (b) On dispose de $P(X) = X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2} = (X-1)(X+\frac{1}{2})$ comme polynôme annulateur de A.

   Pour $n \geq 0$, on réalise la division euclidienne de X^n par $P(X)$. On obtient $X^n = Q_n(X)P(X) + R_n(X)$ avec $R_n(X) = a_nX + b_n$ car $\deg P = 2$.

   Puis en évaluant en 1 et $-1/2$, on obtient $\begin{cases} 1 & = a_n + b_n \\ \left(\frac{-1}{2}\right)^n & = \frac{-1}{2}a_n + b_n \end{cases}$. Donc $a_n = \frac{2}{3}(1 - (-1/2)^n)$ et $b_n = \frac{1}{3}(1 + 2(-1/2)^n)$.

   Puis $A^n = a_nA + b_nI_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2(-1/2)^n & 1-(-1/2)^n & 1-(-1/2)^n \\ 1-(-1/2)^n & 1+2(-1/2)^n & 1-(-1/2)^n \\ 1-(-1/2)^n & 1-(-1/2)^n & 1+2(-1/2)^n \end{pmatrix}$

   (c) D'après l'énoncé, on a $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $U_k = A^kU_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2(-1/2)^k \\ 1-(-1/2)^k \\ 1-(-1/2)^k \end{pmatrix} \to_{k\to+\infty} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   C'est à dire que $\mathbb{P}(X_k = i) \to_{k\to+\infty} \frac{1}{3}$ tend vers une loi uniforme sur les trois positions. Au bout d'un très grand nombre de tours, toutes les positons sont équiprobables.

3. (a)

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda & -q & -p \\ -p & \lambda & -q \\ -q & -p & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - p^3 - q^3 - 3pq\lambda \qquad \text{d'après la règle de Sarrus} \end{aligned}$$

   On obtient donc $\chi(\lambda) = \lambda^3 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3}$.

   On a $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 6 & 9 & 12 \\ 12 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

   Ainsi $A^3 = \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}I_3$ donc $\chi(A) = 0$.

   On a également facilement $\chi(1) = 0$.

   Puis $z = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}$.

   Donc $z^3 = \frac{\sqrt{3}}{9}i = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}$ donc $\chi(z) = 0$.

   (b) On dispose de $\chi(X) = (X-1)(X-z)(X-\bar{z})$ un polynôme annulateur de A.

   On peut adapter la méthode précédente on obtient $\begin{cases} 1 & = a_n + b_n + c_n \\ z^n & = a_nz^2 + b_nz + c_n \\ A^n & = a_nA^2 + b_nA + c_nI_3 \end{cases}$ avec des coefficients $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$ obtenu dans la division euclidienne de X^n par $P(X)$ des polynômes à coefficients réels.

   On a $z^n = 3^{-n/2}e^{5ni\pi/6} = 3^{-n/2}\cos(5n\pi/6) + i3^{-n/2}\sin(5n\pi/6)$.

   Donc $\begin{cases} 1 & = a_n + b_n + c_n \\ 3^{-n/2}\cos(5n\pi/6) & = a_n3^{-1}\cos(5\pi/3) + b_n3^{-1/2}\cos(5\pi/6) + c_n \\ 3^{-n/2}\sin(5n\pi/6) & = a_n3^{-1}\sin(5\pi/3) + b_n3^{-1/2}\sin(5\pi/6) \end{cases}$

Puis $\begin{cases} 1 & = a_n + b_n + c_n \\ 3^{-n/2}\cos(5n\pi/6) & = \frac{1}{6}a_n - \frac{1}{2}b_n + c_n \\ 3^{-n/2}\sin(5n\pi/6) & = -\frac{\sqrt{3}}{6}a_n + \frac{\sqrt{3}}{6}b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 & = a_n + b_n + c_n \\ x_n & = \frac{1}{6}a_n - \frac{1}{2}b_n + c_n \\ y_n & = -a_n + b_n \end{cases}$

en notant $x_n = 3^{-n/2}\cos(5n\pi/6)$ et $y_n = 2\sqrt{3}.3^{-n/2}\sin(5n\pi/6)$

On résout en $\begin{cases} a_n & = \frac{1}{14}(6 - 6x_n - 9y_n) \\ b_n & = \frac{1}{14}(6 - 6x_n + 5y_n) \\ c_n & = \frac{1}{14}(2 + 12x_n + 4y_n) \end{cases}$

Et enfin $A^n = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4a_n + 9c_n & a_n + 6b_n & 4a_n + 3b_n \\ 4a_n + 3b_n & 4a_n + 9c_n & a_n + 6b_n \\ a_n + 6b_n & 4a_n + 3b_n & 4a_n + 9c_n \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 + 6x_n & 3 - 3x_n + 3/2y_n & 3 - 3x_n - 3/2y_n \\ 3 - 3x_n - 3/2y_n & 3 + 6x_n & 3 - 3x_n + 3/2y_n \\ 3 - 3x_n + 3/2y_n & 3 - 3x_n - 3/2y_n & 3 + 6x_n \end{pmatrix}$

(c) On a $z^n \to 0$ car son module $|z| = \frac{\sqrt{3}}{3} < 1$. Donc x_n et y_n tendent vers 0. Ainsi $a_n \to \frac{3}{7}, b_n \to \frac{3}{7}$ et $c_n \to \frac{1}{7}$.

Donc $A^n \to \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Puis $U_k \to \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ et la position asymptotique est équiprobable.

Étude du cas $n = 4$ et $p = 1/2$

4. En adaptant la méthode de la question 1. On obtient $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. On a $B^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Et $B^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B$.

   Ainsi B^2 est idempotente car $(B^2)^2 = B^4 = B^2$.
   Donc pour $k > 0, B^{2k} = B^2$ et $B^{2k+1} = B^2B = B$.

6. On en déduit que $U_{2k} = B^{2k}U_0 = B^2U_0 = U_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une suite constante.

   Et que $U_{2k+1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est constante également.

   Pourtant ces deux vecteurs sont différents. Donc il y a deux valeurs d'adhérence différentes et la suite n'admet pas de limite.

7. Si n est pair alors la position est toujours de la partie opposée au nombre de tour. Ainsi par exemple $\mathbb{P}(X_{2k+1} = 1) = \mathbb{P}(X_{2k} = 2) = 0$. Ainsi si il y a avait une limite on aurait $\mathbb{P}(X_k = j) \to 0$ donc $U_k \to \vec{0}$. Ceci est absurde car la somme des coordonnées de U_k vaut toujours 1 (loi unitaire). Donc la suite (U_k) diverge sans limite.

   La limite de U_{2k} représente les positions impaires équiprobables et la limite de U_{2k+1} représente les positions paires équiprobables.

Étude du cas général avec n impair

8.
```
def simul_X(k,n,p):
        X = 1
        for i in range(k):
                if random.random()<p:
                        if X<n:
                                X += 1
                        else:
                                X = 1
                else:
                        if X>1:
                                X -= 1
                        else:
                                X = n
        return X
```

9. A nouveau, en utilisant la FPT sur le SCEI $\{(X_k = j)\}_{1\leq j\leq n}$.

   On trouve $A(p) = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 & \dots & 0 & p \\ p & 0 & q & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & q \\ q & 0 & 0 & \dots & p & 0 \end{pmatrix} = pJ + qJ^T$.

   Puis $J^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = J^T$ permet d'obtenir $A(p) = pJ + qJ^{n-1}$

10. Le calcul des premières puissances de J montre que l'on permute les coefficients de manière circulaire. De sorte que $J^n = I_n$. On peut également vérifier que $J^n = JJ^{n-1} = JJ^T = I_n$ par calcul.

    Les puissances de J sont cyclique d'ordre n. Si $k = qn + r$ est la division euclidienne de k par n alors $J^k = J^r$ est une des n premières puissances.

11. La matrice J est inversible d'inverse J^{n-1} donc f est un automorphisme et $f^{-1} = f^{n-1}$. Ainsi $A(p) = pJ + qJ^{n-1}$ s'écrit $\varphi = pf + qf^{-1}$.

12. On calcul $f(\vec{u}_j) = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^j \\ \omega^{2j} \\ \vdots \end{pmatrix} = \omega^{-j} \begin{pmatrix} \omega^j \\ \omega^{2j} \\ \omega^{3j} \\ \vdots \end{pmatrix} = \omega^{-j}\vec{u}_j$.

13. Ainsi $f^{-1}(\vec{u}_j) = \omega^j\vec{u}_j$. Puis $\varphi(\vec{u}_j) = pf(\vec{u}_j) + qf^{-1}(\vec{u}_j) = p\omega^{-j}\vec{u}_j + q\omega^j\vec{u}_j = \lambda_j\vec{u}_j$.

14. On peut remarquer que le déterminant $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \det(\omega^{ij})$ est le déterminant de Vander-Monde pour les nombres $\alpha_i = \omega^i$ deux à deux distincts. Donc il est non nul et la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{C}^n$.

15. Les matrices sont diagonales d'après les questions 12 et 13.
    $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = diag(\omega, \omega^2, ..., \omega^{n-1}, 1)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.

16. On a $\lambda_n = p + q = 1$. Puis $\lambda_j = p\omega^{-j} + q\omega^j$. Donc $|\lambda_j| \leq p|\omega^{-j}| + q|\omega^j|$ d'après l'inégalité triangulaire. Or $p|\omega^{-j}| + q|\omega^j| = p + q = 1$. Le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire étant $z_1\bar{z}_2 \in \mathbb{R}_+$. On trouve ici la condition $\omega^{2j} \in \mathbb{R}_+$ ssi $2j$ est un multiple de n ssi $j = n$ car n est impair. On a ainsi pour tout $1 \leq j < n$, le module $|\lambda_j| < 1$.

17. On a $\varphi^k(\vec{u_j}) = \lambda_j^k\vec{u_j} \rightarrow_{k\to+\infty} \vec{0}$ car $\lambda_j^k \rightarrow_{k\to+\infty} 0$.

18. On a $\varphi^k(\vec{u_n}) = \vec{u_n}$ pour tout k. Donc $\varphi^k(\vec{u_n}) \to_{k\to+\infty} \vec{u_n}$ comme suite constante.
    Si on écrit $U_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{u}_j$ alors $U_k = \varphi^k\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{u}_j\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi^k(\vec{u}_j) \to_{k\to+\infty} \alpha_n \vec{u}_n$.
    Ainsi la suite (U_k) tend vers $U_\infty = \alpha_n \vec{u}_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \alpha_n \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ qui représente l'équiprobabilité. On en déduit que $\alpha_n = \frac{1}{n}$ (car loi unitaire) puis $U_\infty = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.