

Devoir Surveillé de Mathématiques n° 9
le lundi 18 Mai 2026 - durée 4h

1 Exercices

1. Calculer les sommes et produits suivants :
 - (a) $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right)$
 - (b) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (2i + 1)$
 - (c) $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right)$
2. Résoudre l'équation $z^2 - 3(1+i)z + 4i = 0$ sur \mathbb{C} .
3. Soit $n \geq 1$. On considère le couple de variables aléatoires donné par $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.
Pour $0 \leq i, j \leq n$, $\mathbb{P}(X = i \cap Y = j) = a \binom{n}{i} \binom{n-j}{j}$.
 - (a) Trouver $a > 0$ afin de définir une loi conjointe unitaire.
 - (b) Déterminer les lois marginales de X et de Y et en déduire que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$.
 - (c) Montrer que $\text{Cov}(X, Y) = -\frac{n}{9}$. Que peut-on en déduire ?
4. Soit $F_1 = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + 2y + z = 0 \right\}$.
Montrer que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$.
5. On considère $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X], P \mapsto P'(0)X$.
Montrer que φ est un projecteur et calculer ses espaces propres.
6. On considère $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-2y \\ -y \\ 2x-2y-z \end{pmatrix}$.
Montrer que s est une symétrie et calculer ses espaces propres.

2 Problème : Marche aléatoire sur un cercle fini.

Soit $n \geq 3$ un entier et $p \in]0, 1[$.

On considère une particule se déplaçant sur un cercle divisé en n positions, numérotées de 1 à n . À chaque étape $k \in \mathbb{N}$, la position de la particule est une variable aléatoire X_k .

- Au départ ($k = 0$), la particule est en position 1 : $P(X_0 = 1) = 1$.
- Si à l'étape k , la particule est en position j , alors à l'étape $k + 1$, elle se déplace :
 - en $j + 1$ si $j < n$ avec une probabilité $p \in]0, 1[$,
 - en 1 si $j = n$ avec une probabilité p .
 - en $j - 1$ si $j > 1$ avec une probabilité $q = 1 - p$,
 - en n si $j = 1$ avec une probabilité q .

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note U_k le vecteur colonne de \mathbb{R}^n défini par : $U_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 1) \\ P(X_k = 2) \\ \vdots \\ P(X_k = n) \end{pmatrix}$.

Étude du cas $n = 3$

Dans cette partie, on fixe $n = 3$.

1. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $U_{k+1} = AU_k$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & q & p \\ p & 0 & q \\ q & p & 0 \end{pmatrix}$.
2. On suppose ici $p = 1/2$.
 - (a) Calculer A^2 , puis exprimer A^2 en fonction de A et I .

- (b) Calculer les puissances de la matrice A .
- (c) En déduire que la suite $(U_k)_{k \geq 0}$ converge vers un vecteur U_∞ que l'on déterminera. Interpréter le résultat.
3. On suppose ici $p = 1/3$. On note $z = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{5i\pi/6}$.
- (a) Calculer $\chi(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A)$ puis préciser les valeurs de $\chi(A)$, $\chi(1)$ et $\chi(z)$.
- (b) Calculer les puissances de la matrice A .
- (c) En déduire que la suite $(U_k)_{k \geq 0}$ converge vers un vecteur U_∞ que l'on déterminera. Interpréter le résultat.

Étude du cas $n = 4$ et $p = 1/2$

Dans cette partie, on fixe $n = 4$ et $p = 1/2$.

4. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $U_{k+1} = BU_k$ avec B à préciser.
5. Calculer B^3 , puis en déduire B^{2n} et B^{2n+1} .
6. En déduire que la suite $(U_k)_{k \geq 0}$ n'admet pas de limite.
7. Pourquoi ce résultat est toujours valable pour n pair et p quelconque.

Étude du cas général avec n impair

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier **impair**. On définit la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Écrire, en Python, une fonction `simul_X(k, n, p)` qui renvoie la position de la particule après k pas. On simule les aléas à l'aide la fonction `random.random()` qui renvoie un `float` aléatoire dans l'intervalle $]0, 1[$.
9. Montrer que $A(p) = pJ + qJ^{n-1}$ permet d'avoir $U_{k+1} = A(p)U_k$ pour tout $k \geq 0$.
10. Vérifier que $J^n = I_n$ et en déduire les puissances de J .

On note $E = \mathbb{C}^n$ muni de $\mathcal{B}_0 = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ sa base canonique. On considère $\varphi : E \rightarrow E$ et $f : E \rightarrow E$ les applications linéaires canoniquement associée à $A(p)$ et J .

On note également $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et on considère les vecteurs $\vec{u}_j = \begin{pmatrix} \omega^j \\ \omega^{2j} \\ \vdots \\ \omega^{nj} \end{pmatrix}$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

11. Montrer que f est un automorphisme et que $\varphi = pf + qf^{-1}$.
12. Montrer que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(\vec{u}_j) = \omega^{-j}\vec{u}_j$.
13. En déduire que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\varphi(\vec{u}_j) = \lambda_j\vec{u}_j$ avec $\lambda_j = p\omega^{-j} + q\omega^j$.
14. Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une base de E .
15. Ecrire les matrices de f et φ dans cette nouvelle base.
16. Calculer λ_n et montrer que pour tout $1 \leq j < n$, le module $|\lambda_j| < 1$.
17. En déduire que $\varphi^k(\vec{u}_j) \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} \vec{0}$ pour $j < n$.
18. En déduire la limite de $P(X_k = j)$ quand $k \rightarrow +\infty$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.