

Déterminants

Généralités

Définition : Il existe une unique (admis) application unitaire, multilinéaire et alternée.

Exemple du cas $n = 2$ avec l'interprétation d'aire orientée.

Exemple du cas $n = 3$ par $\det(u, v, w) = (u \wedge v) \cdot w$ et l'interprétation de volume orienté.

Règle de Sarrus pour le cas $n = 3$.

Propriétés des déterminants

Effets des transvections, dilatations et permutations de colonnes sur le déterminant.

Déterminant d'une matrice triangulaire. Formule homogénéité : $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Caractérisation des matrices inversibles par le déterminant.

Déterminants d'un produit de matrices et de l'inverse d'une matrice inversible.

Effets des transvections, dilatations et permutations de lignes sur le déterminant.

Déterminant de la transposée d'une matrice.

Développement par rapport à une ligne ou colonne

Mineurs d'ordre $p < n$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Cofacteurs et Comatrice d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Calcul de l'inverse par la comatrice. (Admis)

Formule de développement : $\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j_0} \text{Cof}_{i,j_0}(A) = \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} \text{Cof}_{i_0,j}(A)$.

Déterminant dans un espace vectoriel de dimension finie

Déterminant d'une famille de vecteurs et caractérisation des bases.

Déterminant d'un endomorphisme et caractérisation des automorphismes.

Déterminant de la composée de deux endomorphismes, de la réciproque d'un automorphisme.

Analyse asymptotique et Développements limités

Relation de comparaison des fonctions

Equivalent, négligeable et dominée au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Lien entre les relations. Produits, quotients et puissances.

Comparaison lorsque $x \rightarrow +\infty$ de $\ln^\alpha(x)$, x^β et $e^{\gamma x}$ et croissance comparée.

Définitions d'un développement limité

Développement limité d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ à l'ordre n en $a \in I$ sous forme :

$f(x) =_{x \rightarrow a} \sum_{k=0}^n b_k (x-a)^k + o(x-a)^n$ ou $f(a+h) =_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n b_k h^k + o(h^n)$.

Unicité, troncature et valuation. Equivalent simple et signe au voisinage du point.

Développement de référence au voisinage de 0

$x \mapsto \exp(x)$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \tan(x)$ (ordre 5),

$x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $x \mapsto \text{Arctan}(x)$.