

## Analyse asymptotique et Développements limités

### Relation de comparaison des fonctions

Equivalent, négligeable et dominée au voisinage de  $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ .

Lien entre les relations. Produits, quotients et puissances.

Comparaison lorsque  $x \rightarrow +\infty$  de  $\ln^\alpha(x)$ ,  $x^\beta$  et  $e^{\gamma x}$  et croissance comparée.

### Définitions d'un développement limité

Développement limité d'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  à l'ordre  $n$  en  $a \in I$  sous forme :

$f(x) =_{x \rightarrow a} \sum_{k=0}^n b_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$  ou  $f(a+h) =_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n b_k h^k + o(h^n)$ .

Unicité, troncature et valuation. Equivalent simple et signe au voisinage du point.

### Propriétés des développement limité

Combinaisons linéaires et produit de deux fonctions en un même point.

Composée de deux fonctions(admis). Quotient par la composée.

Primitivation d'un développement limité.

Formule de Taylor-Young.

### Développement de référence au voisinage de 0

$x \mapsto \exp(x)$ ,  $x \mapsto \cos(x)$ ,  $x \mapsto \sin(x)$ ,  $x \mapsto \tan(x)$  (ordre 5),

$x \mapsto \frac{1}{1-x}$ ,  $x \mapsto \ln(1+x)$ ,  $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ,  $x \mapsto \text{Arctan}(x)$ .

---

## Liste de Questions de cours :

- Etablir le lien entre les trois relations de comparaison.
- Démontrer l'unicité du développement limité.
- Démontrer le résultat sur le produit des développements limités.
- Démontrer le résultat sur la primitive d'un développement limité.

### Exercices d'Application du Cours

1. Déterminer le  $DL_3(0)$  de la fraction rationnelle  $\frac{1}{x^2-3x+2}$ .
2. Déterminer le  $DL_2(4)$  de la fonction racine carrée avec  $\sqrt{4+h} = 2\sqrt{1+(h/4)}$ .
3. Déterminer le  $DL_2(\pi/3)$  de la fonction sinus.
4. Déterminer le  $DL_5(0)$  de  $\text{th}(x) = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}$  en tant que quotient.
5. Déterminer le  $DL_3(0)$  de  $\text{Arctan}\left(\frac{1+2x}{1+x}\right)$  en tant que primitive.
6. En tant que bijection réciproque, déterminer un  $DL_3(1)$  de  $\text{Arccos}(x)$ .

### Devoir libre

1. Soit  $0 < a < b$  deux réels. Montrer que  $\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n$  tend vers  $\sqrt{ab}$ .
2. Soit  $n \geq 1$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{e^{(n+1)x}-1}{e^x-1}$  sur  $\mathbb{R}^*$ .
  - (a) Montrer que  $f$  se prolonge par continuité en 0.
  - (b) Déterminer le  $DL_3(0)$  de  $f$ .
  - (c) En déduire (à nouveau) la formule de  $\sum_{k=1}^n k^3$ .