Semaine 30 - Du 8 au 12 Juin 2026

Analyse asymptotique et Développements limités

Révisions de la semaine 29

Intégration

Construction de l'intégrale de Riemann

Subdivision. Fonction en escalier. Définition de $\int_a^b f$ pour f continue sur $[a, b]$.
Linéarité. Relation de Chasles. Stricte positivité. Inégalité triangulaire.
Théorème fondamentale l'analyse différentielle.

Lien avec le calcul de somme

Somme de Riemann.
Inégalité de Taylor-Lagrange.

Liste de Questions de cours :

a) Démontrer l'unicité du développement limité.
b) Démontrer le résultat sur le produit des développements limités.
c) Démontrer le résultat sur la primitive d'un développement limité.
d) Montrer l'inégalité triangulaire sur les intégrales réelles puis complexes.
e) Montrer le théorème fondamentale de l'analyse différentielle.
f) Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

Exercices d'Application du Cours

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.
   On suppose que $|f| \leq 1$ et que $\int_a^b f = b - a$.
   Montrer que $\forall x \in [a,b], f(x) = 1$.
2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.
   Montrer qu'il existe $c \in [a,b], f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$.
3. Déterminer la limite de la suite $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.
4. Déterminer la limite de la suite $P_n = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^{n} (n+k)^{1/n}$.

Devoir libre

1. On recherche les solutions de l'équation $(x^2+1)\sin x = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer qu'il existe exactement deux solutions $a_n < b_n$ dans l'intervalle $[0,\pi] + 2n\pi$.
   (b) Déterminer un développement asymptotique de ses deux suites à l'ordre 4.
2. On recherche à montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arctan}^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! \operatorname{Im}\left(\frac{1}{(x-i)^{n+1}}\right)$.
   (b) En déduire la valeur de $\sup_{x \in \mathbb{R}} \left|\operatorname{Arctan}^{(n+1)}(x)\right|$.
   (c) En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, démontrer la formule proposée.