Suite définie de manière implicite.

On recherche les solutions de l'équation $(x^2+1)\sin x = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe exactement deux solutions $a_n < b_n$ dans l'intervalle $[0, \pi]+2n\pi$.
2. Déterminer un développement asymptotique de ses deux suites à l'ordre 4.

1. On étudie la fonction $f(x) = (x^2+1)\sin x$. Elle est continue, positive et strictement croissante sur les intervalles $I_n = [0, \pi/2] + 2n\pi$ car $x \mapsto x^2+1$ et $x \mapsto \sin x$ le sont. De plus $f(0+2n\pi) = f(\pi+2n\pi) = 0 < 1$ et $f(\pi/2+2n\pi) = (\pi/2+2n\pi)^2+1 > 1$. Donc le théorème de la bijection continue donne l'existence d'une unique solution $a_n \in I_n$ à l'équation $f(x) = 1$

   Et $f'(x) = 2x\sin x + (x^2+1)\cos x$. On décompose $f'(x) = 2x\cos x g(x)$ en notant $g(x) = \tan(x) + \frac{x^2+1}{2x} = \tan(x) + \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}$. On calcul $g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{x^2-1}{2x^2}$ qui strictement positive sur $J_n = [\pi/2, \pi] + 2n\pi$. De plus $\lim_{(\pi/2+2n\pi)^+} g = -\infty$ et $\lim_{(\pi+2n\pi)} g = \frac{(\pi+2n\pi)^2+1}{2(\pi+2n\pi)} > 0$. Donc g s'annule une unique fois sur J_n. On note α_n tel que $g(\alpha_n) = 0$. On en déduit que f' est strictement positive sur $](\pi+2n\pi), \alpha_n[$ et strictement négative sur $]\alpha_n, (\pi+2n\pi)]$.

   On a déjà $f(\pi/2+2n\pi) > 1$ et on a $f(\pi+2n\pi) = 0 < 1$. Donc f s'annule une unique fois en $b_n \in J_n$.

   De plus par construction, $2n\pi < a_n < (\pi/2+2n\pi) < \alpha_n < b_n < (\pi+2n\pi)$.

2. Par encadrement, on sait que $a_n \sim_{+\infty} b_n \sim_{+\infty} 2n\pi$.

   On a $a_n = 2n\pi + \text{Arcsin}\left(\frac{1}{a_n^2+1}\right) = 2n\pi + \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

   De même $b_n = 2n\pi + \pi - \left(\frac{1}{b_n^2+1}\right) = (2n+1)\pi - \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

Utilisation de la formule de Taylor-Lagrange.

On recherche à montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arctan}^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! \operatorname{Im}\left(\frac{1}{(x-i)^{n+1}}\right)$.
2. En déduire que $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\operatorname{Arctan}^{(n+1)}(x)\right| \leq n!$.
3. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, démontrer la formule proposée.

1. La fonction Arctan est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

   Pour $x \in \mathbb{R}$,
   $$\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{x-i}\right).$$
   En effet,
   $$\frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} + i\frac{1}{x^2+1}.$$
   Puis on peut dériver n fois cette expressions pour obtenir :
   $$\operatorname{Arctan}^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! \operatorname{Im}\left(\frac{1}{(x-i)^{n+1}}\right)$$

2. On utilise l'inégalité $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ dans l'expression précédente.

   Ainsi :
   $$\left|\operatorname{Arctan}^{(n+1)}(x)\right| \leq n! \frac{1}{|x-i|^{n+1}} \leq n!.$$
   car $|x-i|^{n+1} = \sqrt{x^2+1}^{\,n+1} \geq 1$.

   Ainsi
   $$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\operatorname{Arctan}^{(n+1)}(x)\right| \leq n!.$$

3. On a $\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}(1) = T_n + R_n$
   avec
   $$T_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}^{(k)}(0)\frac{1^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$
   et
   $$|R_n| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\operatorname{Arctan}^{(n+1)}(x)\right| \frac{1^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0.$$
   Donc $R_n \to_{n\to+\infty} 0$ puis $S_n \to_{n\to+\infty} \frac{\pi}{4}$. Ce qui démontre que la série converge et que
   $$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$