Calcul d'une limite avec DL

Soit $0 < a < b$ deux réels.
Montrer que $\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n$ tend vers $\sqrt{ab}$.

On a $a^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(a)\right) =_{n\to+\infty} 1 + \frac{\ln(a)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
De même $b^{1/n} =_{n\to+\infty} 1 + \frac{\ln(b)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
Donc $\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2} =_{n\to+\infty} \frac{1+1}{2} + \frac{\ln(a)+\ln(b)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) =_{n\to+\infty} 1 + \frac{\ln(\sqrt{ab})}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi } \left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n &=_{n\to+\infty} \exp\left[n\ln\left(1+\frac{\ln(\sqrt{ab})}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]\\
&=_{n\to+\infty} \exp\left[n\frac{\ln(\sqrt{ab})}{n} + no(1/n)\right]\\
&\to_{n\to+\infty} \exp\left[\ln(\sqrt{ab})\right] = \sqrt{ab}
\end{aligned}$$

DL et somme des puissances des entiers

Soit $n \geq 1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{e^{(n+1)x}-1}{e^x-1}$ sur $\mathbb{R}^*$.

1. Montrer que f se prolonge par continuité en 0.
2. Déterminer le $DL_3(0)$ de f.
3. En déduire (à nouveau) la formule de $\sum_{k=1}^n k^3$.

1. Au voisinage de 0, on a $e^x - 1 \sim_0 x$ et $e^{(n+1)x} - 1 \sim_0 (n+1)x$. Donc $f(x) \sim_0 \frac{(n+1)x}{x} = n+1$. Donc f se prolonge par continuité en posant $f(0) = n+1$.
2. On a $e^{ax} - 1 =_{x\to0} ax + \frac{a^2}{2}x^2 + \frac{a^3}{6}x^3 + \frac{a^4}{24}x^4 + o(x^4)$.

$$\begin{aligned}
f(x) &=_{x\to0} \frac{(n+1)x + \frac{(n+1)^2}{2}x^2 + \frac{(n+1)^3}{6}x^3 + \frac{(n+1)^4}{24}x^4 + o(x^4)}{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)}\\
&=_{x\to0} (n+1)\frac{1 + (n+1)\frac{x}{2} + (n+1)^2\frac{x^2}{6} + (n+1)^3\frac{x^3}{24} + o(x^3)}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)}\\
&=_{x\to0} (n+1)\left(1 + (n+1)\frac{x}{2} + (n+1)^2\frac{x^2}{6} + (n+1)^3\frac{x^3}{24} + o(x^3)\right)\\
&\quad \times\left(1 - (\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}) + (\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6})^2 - (\frac{x}{2})^3 + o(x^3)\right)\\
&=_{x\to0} (n+1)\left(1 + (n+1)\frac{x}{2} + (n+1)^2\frac{x^2}{6} + (n+1)^3\frac{x^3}{24} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^3)\right)\\
&=_{x\to0} (n+1)\left(1 + \frac{n}{2}x + \left[\frac{(n+1)^2}{6} - \frac{(n+1)}{4} + \frac{1}{12}\right]x^2 + \left[\frac{(n+1)^3}{6} - \frac{(n+1)^2}{12} + \frac{(n+1)}{24}\right]x^3 + o(x^3)\right)\\
&=_{x\to0} (n+1) + \frac{n(n+1)}{2}x + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}x^2 + \frac{n^2(n+1)^2}{24}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

3. On remarque que $\sum_{k=0}^n e^{kx} = \frac{e^{(n+1)x}-1}{e^x-1} = f(x)$.

Et on peut également faire le $DL_n(0)$ en tant que combinaison linéaire :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} e^{kx} &= \sum_{k=0}^{n} 1 + kx + k^2x^2/2 + k^3x^3/6 + o(x^3)\\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) x + \left(\sum_{k=0}^{n} k^2\right) x^2/2 + \left(\sum_{k=0}^{n} k^3\right) x^3/6 + o(x^3)\end{aligned}$$

En identifiant avec la question précédente, on retrouve les formules :
$\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$ à l'ordre 0.
$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ à l'ordre 1.
$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ à l'ordre 2.
$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ à l'ordre 3.