DS de Mathématiques n° 10 - Corrigé

1 Développement asymptotique d'une suite implicite

1. La fonction φ_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme.
   Pour $x > 0$, on a $\varphi_n'(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1} > 0$.
   Donc la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. La fonction est strictement croissante et continue sur $]0, +\infty[$.
   Elle réalise donc une bijection continue de $]0, +\infty[$ vers $\varphi_n(]0, +\infty[) =]-1, +\infty[$.
   En effet $\varphi_n(0) = -1$ et $\lim_{+\infty} \varphi_n = +\infty$.
   Donc $0 \in]-1, +\infty[$ admet un unique antécédent $x_n = \varphi_n^{-1}(0) \in]0, +\infty[$.
3. On a :
   $$\varphi_{n+1}(x_n) = \sum_{k=1}^{n+1} x_n^k - 1 = x_n^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} x_n^k - 1 = x_n^{n+1} + \varphi_n(x_n) = x_n^{n+1} > 0.$$
   Ainsi $\varphi_{n+1}(x_n) > 0 = \varphi_{n+1}(x_{n+1})$ avec φ_{n+1} strictement croissante.
   Donc $x_n > x_{n+1}$ et la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.
4. On a $\varphi_1(x) = x - 1$ donc $x_1 = 1$ est l'unique racine.
   Par stricte monotonie on a pour $n \geq 2, 0 < x_n \leq x_2 < 1$.
   Puis on a $0 < x_n^n \leq x_2^n$ avec $x_2^n \to_{n\to+\infty} 0$ car $|x_2| < 1$.
   Ainsi par théorème d'encadrement $x_n^n \to_{n\to+\infty} 0$.
5. On a pour $x \neq 1, \sum_{k=1}^n x^k = x\frac{x^n-1}{x-1}$.
   Donc pour $n \geq 2, \varphi_n(x_n) = x_n\frac{x_n^n-1}{x_n-1} - 1$. Or $\varphi_n(x_n) = 0$.
   D'où $x_n(x_n^n - 1) = (x_n - 1)$ puis $x_n^{n+1} - 2x_n + 1 = 0$.
   Pour $n = 1$, on a $x_1 = 1$ et la relation $x_1^2 - 2x_1 + 1 = 0$ est bien vérifiée.
   Or $x_n^{n+1} = x_n x_n^n \to_{n\to+\infty} 0$ car $x_n^n \to 0$ et x_n est bornée.
   Puis $x_n = \frac{1+x_n^{n+1}}{2} \to_{n\to+\infty} \frac{1}{2}$ par opération.
6. On sait que $x_n = \frac{1}{2} + o(1)$. Donc :
   $$x_n^n =_{n\to+\infty} \exp(n\ln(1/2 + o(1))) =_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \exp(o(1)) \sim_{n\to+\infty} 2^{-n}.$$
   Ainsi $x_n^n \sim_{n\to+\infty} 2^{-n} =_{n\to+\infty} o\left(\frac{1}{n}\right)$.
   Puis : $x_n(x_n^n - 2) + 1 = 0$ donc :
   $$x_n = \frac{1}{2 - x_n^n} =_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x_n^n}{2} + o(x_n^n)\right) =_{n\to+\infty} \frac{1}{2} + \frac{x_n^n}{4} + o(x_n^n).$$
   On obtient bien :
   $$x_n =_{n\to+\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+2}} + o(2^{-n})$$

2 Existence de l'intégrale Gaussienne

D'après l'épreuve Math 3 - Banque PT - 2015

1. (a) On a :
   $$\begin{aligned} f_1(x) - g_1(x) &= \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right) - \left(e^{-x^2} + x^2 - 1\right) \\ &= e^{x^2} - e^{-x^2} - 2x^2 = 2\mathrm{sh}\left(x^2\right) - 2x^2. \end{aligned}$$

(b) On définit $\varphi(t) = \text{sh}\,(t) - t$ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.
On a $\varphi'(t) = \text{ch}\,(t) - 1 \geq 0$ car ch atteint son minimum en 0 et $\text{ch}\,(0) = 1$.
Donc pour $t \geq 0, \varphi(t) \geq \varphi(0) = 0$ et $\text{sh}\,(t) \geq t$.

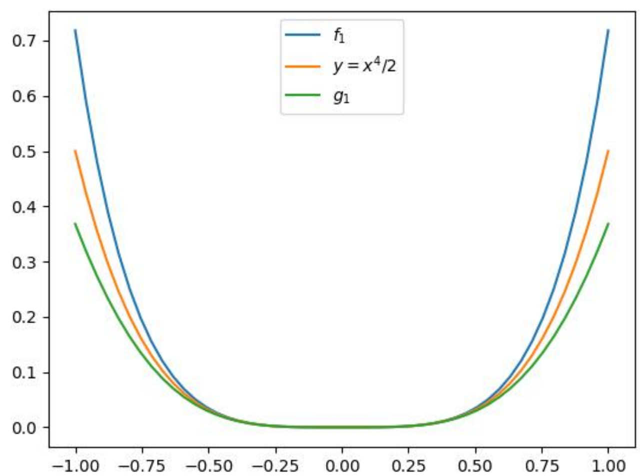
(c) On a :

$$\begin{aligned} f_1(x) = e^{x^2} - x^2 - 1 &=_{x\to 0} 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} - x^2 - 1 + o(x^6) \\ &=_{x\to 0} \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + o(x^6). \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} g_1(x) = e^{-x^2} + x^2 - 1 &=_{x\to 0} 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + x^2 - 1 + o(x^6) \\ &=_{x\to 0} \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + o(x^6). \end{aligned}$$

(d) Les fonctions sont paires donc l'étude sur $[0, 1]$ permet de tracer sur $[-1, 1]$ par symétrie.
Les courbes admettent pour asymptote $y = x^4/2$ au voisinage de 0 avec f_1 au dessus et g_1 en dessous.



2. (a) Les fonctions f_n et g_n sont de classes C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = \frac{2x}{n} e^{x^2/n} - \frac{2x}{n} = \frac{2x}{n}\left(e^{x^2/n} - 1\right)$.
Or $e^{x^2/n} - 1 > 0$ donc f_n est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$.
De même $g_n'(x) = \frac{-2x}{n}\left(e^{-x^2/n} - 1\right)$. Donc g_n suit les mêmes variations.

(b) Soit $x \in [0, \sqrt{n}]$ un domaine où les fonctions sont croissantes.
On a :

$$0 = f_n(0) \leq f_n(x) = e^{x^2/n} - x^2/n - 1.$$

Donc :

$$0 < (1 + x^2/n) \leq e^{x^2/n}.$$

Puis en passant à la puissance n :

$$0 < \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{x^2}.$$

Donc en passant à l'inverse :

$$e^{-x^2} \leq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$$

De même

$$0 = g_n(0) \leq g_n(x) = e^{-x^2/n} + x^2/n - 1.$$

Donc

$$0 \leq (1 - x^2/n) \leq e^{-x^2/n}.$$

Puis

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2}.$$

(c) On a :

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = \exp\big(n \ln(1 - x^2/n)\big) =_{n \to +\infty} \exp\big(n(-x^2/n + o(1/n))\big)$$
$$=_{n\to+\infty} \exp\big(-x^2 + o(1)\big) \to_{n\to+\infty} e^{-x^2}.$$

De même un développement asymptotique donne $\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \to_{n\to+\infty} e^{-x^2}$.

3. (a) La concavité de la fonction ln montre que :

$$\frac{1}{n}\ln(a) + \frac{n-1}{n}\ln(b) \leq \ln\left(\frac{1}{n}a + \frac{n-1}{n}b\right).$$

En appliquant la relation avec $a = 1 + t^2$ et $b = 1$, on obtient :

$$\frac{1}{n}\ln(1+t^2) \leq \ln(1 + t^2/n).$$

On en déduit $(1 + t^2) \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n$ donc $\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \leq \frac{1}{1+t^2}$.

(b) On a $\int_0^M \frac{\underset{\cdot}{t}}{1+t^2} = \mathrm{Arctan}\,(M) \to_{M\to+\infty} \frac{\pi}{2}$.

(c) La fonction $M \to I_M$ est strictement croissante car d'après le théorème fondamentale de l'analyse différentielle sa dérivée est $e^{-M^2} > 0$. D'après le théorème de la limite monotone, I_M admet une limite finie ou infinie lorsque $M \to +\infty$.

De plus $I_M \leq \int_0^M \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \underset{\cdot}{t} \leq \int_0^M \frac{1}{1+t^2}\underset{\cdot}{t} \leq \frac{\pi}{2}$.

Donc I_M est majorée et ainsi la limite est finie.

3 Etude d'une primitive

D'après les Mines d'Alès-Albi-Douai-Nantes 2007
Corrigé officiel en ligne