Devoir Surveillé de Mathématiques n° 10
le mardi 9 Juin 2026 - durée 3h

Les 3 parties sont indépendantes.

1 Développement asymptotique d'une suite implicite

Soit $n \geq 1$. On considère la fonction $\varphi_n(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x - 1$.

1. Etudier les variations de φ_n sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer qu'il existe un unique $x_n > 0$ tel que $\varphi_n(x_n) = 0$.
3. Déterminer le signe de $\varphi_{n+1}(x_n)$ et en déduire que $(x_n)_{n\geq 0}$ est strictement monotone.
4. Montrer que $x_n^n \to_{+\infty} 0$.
5. Montrer que $x_n^{n+1} - 2x_n + 1 = 0$ et en déduire la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.
6. Montrer que $x_n^n =_{n\to+\infty} o\left(\frac{1}{n}\right)$. En déduire que $x_n =_{n\to+\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+2}} + o(2^{-n})$.

2 Existence de l'intégrale Gaussienne

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les fonctions f_n et g_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = e^{\frac{x^2}{n}} - \frac{x^2}{n} - 1 \text{ et } g_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}} + \frac{x^2}{n} - 1$$

1. On souhaite tracer les courbes représentatives de f_1 et g_1 sur un même graphe.
   (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f_1(x) - g_1(x)$ à l'aide de la fonction sinus hyperbolique.
   (b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}\,(t) \geq t$. En déduire une comparaison de f_1 et g_1.
   (c) Déterminer les développements limités à l'ordre 6 de f_1 et g_1 au voisinage de 0.
   (d) Tracer les courbes représentatives de f_1 et g_1 sur l'intervalle $[-1, 1]$. On pourra prendre l'approximation $e \simeq 2.5$.
2. On suppose $n \geq 2$.
   (a) Etudier les variations des fonctions f_n et g_n.
   (b) En déduire que pour $x \in [0, \sqrt{n}]$, $\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2} \leq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$.
   (c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$.
3. Soit $M \in \mathbb{R}_+$.
   (a) Montrer que pour tout $t \geq 0$, $\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \leq \frac{1}{1+t^2}$.
   (b) Montrer que $\lim_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.
   (c) En déduire que $I_M = \int_0^M e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ admet une limite lorsque $M \to +\infty$.

3 Etude d'une primitive

Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on définit : $f(t) = \exp(-1/t)$ et $g(t) = \frac{f(t)}{t}$.

Partie A - Généralités

1. Prouver que f et g sont C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour $t > 0, tf'(t) = g(t)$.
2. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et que le prolongement est dérivable en 0.
3. Etudier les variations de g et tracer son graphe sachant que $e^{-1} = 0.36$ à 10^{-2} près.
4. Soit H la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t \mapsto g(1/t)$ s'annulant en 1.
   (a) Calculer H.
   (b) Déterminer un développement limité de H en 0 à l'ordre 3.
5. Soit $n \geq 3$ un entier. On introduit l'équation $(E_n) : f(t) = t/n$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer que (E_n) admet une unique solution dans $]0, 1[$ notée α_n.
   De même, montrer que (E_n) admet une unique solution dans $]1, +\infty[$ notée β_n.
   (b) Montrer que les suite $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ et $(\beta_n)_{n\geq 3}$ sont monotones.
   (c) Montrer qu'elles ne peuvent pas tendre vers $l \in \mathbb{R}_+^*$ et en déduire leurs limites.

Partie B - Fonctions définies par des intégrales

On prolonge f en posant $f(0) = 0$.

6. Montrer que la fonction f est ainsi de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. On précisera $f'(0)$.
7. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que pour tout $x > 0, F(x) = xe^{-1/x} - G(x)$.
   (b) En séparant l'intégrale de G, montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que : pour tout $x \geq 1, 0 \leq G(x) \leq C + \ln(x)$.
   (c) En déduire que $G(x) =_{x\to+\infty} x$ et en déduire un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$.
8. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $(E) : x^2y' + y = x^2$ à l'aide de la fonction F.

Partie C - Etude qualitative d'une équation différentielle

On considère une solution y de (E) cette fois sur $\mathbb{R}_+$ et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$. Nous allons, sans calculer explicitement y, déterminer la suite des $u_n = y^{(n)}(0)$.

9. Déterminer $u_0 = y(0)$.
10. En dérivant (E), calculer $u_1 = y'(0)$ et $u_2 = y''(0)$.
11. Peut-on avoir y de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$?
12. Soit $n \geq 3$ un entier. A l'aide de la formule de Leibniz montrer que :
    $x^2y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx)y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0$.
13. En déduire une expression de u_n à l'aide d'une factorielle. Écrire le développement limité en 0 de la fonction y à tout ordre.