Semaine 31 - Du 15 au 19 Juin 2026

Intégration

Construction de l'intégrale de Riemann

Subdivision. Fonction en escalier. Définition de $\int_a^b f$ pour f continue sur $[a,b]$.
Linéarité. Relation de Chasles. Stricte positivité. Inégalité triangulaire.
Théorème fondamentale l'analyse différentielle.

Lien avec le calcul de somme

Somme de Riemann.
Inégalité de Taylor-Lagrange.

Intégrale sur $[a,+\infty[$

Définition de la convergence et de la convergence absolue.
Linéarité. Relation de Chasles. Stricte positivité. Inégalité triangulaire.
Hypothèse pour réaliser IPP et Changement de variable.

Série numérique

Définition

Suites des termes généraux, des sommes partielles et des restes.
Convergence, divergence et divergence grossière d'une série.
Linéarité. Série télescopique. Série géométrique et de Riemann.

Série à termes positifs

La série $\sum u_n$ converge ssi la suite (S_n) est majorée.
Comparaison série-intégrale.
Comparaison des séries à termes positifs.
Régle de D'Alembert.

Convergence Absolue

Inégalité triangulaire et $CV \Rightarrow CVA$.
Critère spécial des séries alternées.

Liste de (nouvelles) Questions de cours :

a) Soit f continue positive. Montrer que $\int_a^\infty f$ converge ssi F est une primitive majorée.
b) Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim_{n\to+\infty} \ln(n) + \gamma + o(1)$.
c) Démontrer la comparaison série-intégrale.
d) Démontrer la règle de D'Alembert.
e) Démontrer le critère spécial des séries alternées.

Devoir libre

1. (a) Prouver que $\sqrt{n^2+n+1} =_{n\to+\infty} n + a + \frac{b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où l'on précisera les constantes $a, b \in \mathbb{R}$.
   (b) Démontrer la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.
   (c) En déduire la convergence de la série $\sum \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$.
   (d) La série est-elle absolument convergente ?
2. On considère les intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que $(W_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et tend vers 0.
   (b) A l'aide d'une IPP, montrer que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
   (c) En déduire que $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$ puis que $W_n \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
   (d) Montrer par récurrence que $W_{2n} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$.
   (e) En déduire que la formule de Stirling $\boxed{n! \sim_{n\to+\infty} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$.