

Espace préhilbertien réel

Généralités

Produit scalaire et norme associée.

Exemple de référence sur \mathbb{R}^n , $C^0([a, b], \mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$.

Inégalité de Cauchy-Swartz. Inégalité triangulaire.

Identités remarquables, du parallélogramme et de polarisation.

Orthogonalité

Les familles orthogonales sont libres.

Les sous-espaces F et F^\perp sont en somme directe orthogonale.

Calculs des coordonnées, de la norme et du produit scalaire à l'aide d'une base orthonormée.

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Projecteur orthogonal

Si F est de dimension finie alors $E = F \oplus F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp = F$.

Formule $p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x | b_i \rangle b_i$ avec (b_1, \dots, b_p) une base orthonormée d'un sous-espace F .

Distance d'un vecteur à un sous-espace. Inégalité de Bessel.

Liste de (nouvelles) Questions de cours :

- a) Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz.
- b) Démontrer que $E = F \oplus F^\perp$ si F est de dimension finie.
- c) Montrer que $\langle A|B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- d) Montrer que $\langle P|Q \rangle = \int_a^b P(t)Q(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
- e) Montrer que $p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x | b_i \rangle b_i$ est le projecteur orthogonal sur $F = \text{Vect}(b_1, \dots, b_p)$.

Devoir libre

1. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\langle P|Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$.
 - (a) Montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur E .
 - (b) Pour $n = 2$, déterminer une base orthonormée de E échelonnée en degré.
 - (c) On pose $F = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(X)$. Calculer F^\perp .
 - (d) En déduire la distance de X^2 à F .
2. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $\langle u|v \rangle = 2u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + u_2v_2$ pour $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.
 - (a) Montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur E .
 - (b) Déterminer une base orthonormée de E .
 - (c) Déterminer la distance de $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ à l'axe des abscisses.
3. On considère $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x+2y+2z \\ 2x+y-2z \\ 2x-2y+z \end{pmatrix}$.
 - (a) Montrer que s est une symétrie vectorielle.
 - (b) Déterminer ses espaces propres $E_1 = \text{Ker}(s - id_E)$ et $E_2 = \text{Ker}(s + id_E)$.
 - (c) Montrer que E_1 et E_2 sont supplémentaires orthogonaux dans \mathbb{R}^3 .
 - (d) Déterminer $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$ compatible à cette décomposition. Ecrire la matrice de passage P avec la base canonique \mathcal{B}_0 .
 - (e) On note $S = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(s)$ et $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$. Préciser le lien entre les matrices S, D et P .
Que peut-on remarquer sur leurs transposées S^T, D^T et P^T ?