

### Série semi-convergente

1. Prouver que  $\sqrt{n^2 + n + 1} =_{n \rightarrow +\infty} n + a + \frac{b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$   
où l'on précisera les constantes  $a, b \in \mathbb{R}$ .
2. Démontrer la convergence de la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ .
3. En déduire la convergence de la série  $\sum \cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1})$ .
4. La série est-elle absolument convergente ?

1. On a  $\sqrt{n^2 + n + 1} = n(1 + 1/n + 1/n^2)^{1/2}$   
 $=_{+\infty} n \left[1 + \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} + \frac{c}{n^3} + o(1/n^3)\right]$   
 $=_{+\infty} n + \frac{1}{2} + \frac{3}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .
2. La série  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  est alternée et la suite  $(1/n)_{n \geq 1}$  est décroissante et tend vers 0. D'après le critère spécial des séries alternées, la série harmonique alternée converge.
3. On a  $\cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}) = \cos\left(n\pi + \pi/2 + \frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$   
 $= (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$   
 $= (-1)^{n+1} \frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .  
On a donc décomposé en somme de  $\frac{-3\pi}{8} \sum \frac{(-1)^n}{n}$  et  $\sum \frac{1}{n^2}$  deux séries convergentes. Donc la série obtenue par combinaison linéaire converge.
4. La série n'est pas absolument convergente car  $|\cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1})| \sim \frac{3\pi}{8n}$  et la série à termes positifs  $\sum \frac{1}{n}$  diverge.

## Intégrale de Wallis

On considère les intégrales de Wallis  $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$ .

1. Montrer que  $(W_n)_{n \geq 0}$  est décroissante et tend vers 0.
2. A l'aide d'une IPP, montrer que  $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ .
3. En déduire que  $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$  puis que  $W_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ .
4. Montrer par récurrence que  $W_{2n} = \frac{(2n)! \pi}{2^{2n+1} (n!)^2}$ .
5. En déduire que la formule de Stirling  $n! \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ .

1. On a  $W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^t(\sin t - 1) dt < 0$  car  $\sin t \in [0, 1]$ .  
d'après le théorème de la limite monotone  $W_n \rightarrow l \geq 0$ .  
Puis pour  $a < \pi/2$ ,  $W_n = \int_0^a \sin^n(t) dt + \int_a^{\pi/2} \sin^n(t) dt \leq \sin^n(a) + (\pi/2 - a)$ .  
Donc en passant à la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , on a  $0 \leq l \leq (\pi/2 - a)$ .  
Puis  $l = 0$  en passant à la limite pour  $a \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .

2. On a :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin t \sin^{n+1}(t) dt \\ &= [-\cos t \sin^{n+1}(t)] - \int_0^{\pi/2} (-\cos t)(n+1) \cos t \sin^n(t) dt \\ &= 0 + (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) \sin^n(t) dt \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t) \sin^n(t) dt \\ &= (n+1)(W_n - W_{n+2}). \end{aligned}$$

Donc  $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ .

3. On pose  $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$ . D'après la question précédente, on trouve :

$$u_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1} = u_n$$

Donc la suite est constante et  $u_0 = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$ .

Ainsi  $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$ .

Puis  $W_n \geq W_{n+1} \geq W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n \sim W_n$ .

Donc par encadrement  $W_{n+1} \sim W_n$ .

Ainsi  $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$  devient en équivalent  $nW_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$

puis  $W_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ .

4. Initialisation. On a  $W_0 = \frac{\pi}{2}$ .

Hérédité.  $W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{2^2(n+1)^2} \frac{(2n)! \pi}{2^{2n+1}(n!)^2} = \frac{(2n+2)! \pi}{2^{2n+3}((n+1)!)^2}$ .

5. En étudiant la convergence de la série télescopique  $\sum v_{n+1} - v_n$  avec  $v_n = \ln\left(\frac{n!}{\sqrt{n}(n/e)^n}\right)$ .  
On montre que  $v_n \rightarrow l$  puis  $n! \sim C\sqrt{n}(n/e)^n$ .

Puis on obtient  $W_{2n} \sim \frac{C\sqrt{2n}(2n/e)^{2n}\pi}{2^{2n+1}(C\sqrt{n}(n/e)^n)^2} \sim \frac{C\sqrt{2\pi}}{2C^2\sqrt{n}} = \frac{\pi}{C\sqrt{2n}}$ . Or  $W_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ . Donc on en déduit que  $C = \sqrt{2\pi}$ . Donc :

$$n! \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$