

Espace euclidien avec les polynômes

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\langle P|Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$.

1. Montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur E .
2. Pour $n = 2$, déterminer une base orthonormée de E échelonnée en degré.
3. On pose $F = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(X)$. Calculer F^\perp .
4. En déduire la distance de X^2 à F .

1. Bilinéaire On a :

$$\begin{aligned} \langle P + \lambda R | Q \rangle &= \sum_{k=0}^n \left(P^{(k)}(1) + \lambda R^{(k)}(1) \right) Q^{(k)}(1) \\ &= \sum_{k=0}^n P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1) + \lambda \sum_{k=0}^n R^{(k)}(1)Q^{(k)}(1) \\ &= \langle P | Q \rangle + \lambda \langle R | Q \rangle \end{aligned}$$

Symétrique On a :

$$\langle Q | P \rangle = \sum_{k=0}^n Q^{(k)}(1)P^{(k)}(1) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1) = \langle P | Q \rangle$$

Donc on en déduit la linéarité à droite.

Définie positive On a :

$$\langle P | P \rangle = \sum_{k=0}^n \left(P^{(k)}(1) \right)^2 \geq 0$$

Puis si $\langle P | P \rangle = 0$ alors :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P^{(k)}(1) = 0 \Rightarrow \text{mult}_1(P) \geq n + 1 \Rightarrow P = 0$$

Car un polynôme non nul ne peut pas avoir plus de racines, comptées avec multiplicité, que son degré.

2. On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2)$.

On a $\|1\|^2 = 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$ donc $U_1 = 1$.

Puis $\langle 1 | X \rangle = 1.1 + 0.1 + 0.0 = 1$. Donc $\tilde{U}_2 = X - 1$.

Puis $\|X - 1\|^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1$. Donc $U_2 = X - 1$.

Enfin $\tilde{U}_3 = X^2 - \langle X^2 | 1 \rangle 1 - \langle X^2 | X - 1 \rangle (X - 1) = X^2 - 2X + 1$.

car $\langle X^2 | 1 \rangle = 1.1 + 2.0 + 2.0 = 1$ et $\langle X^2 | X - 1 \rangle = 1.0 + 2.1 + 2.0 = 2$.

Puis $\|(X^2 - 2X + 1)\|^2 = 0.0 + 0.0 + 2.2 = 4$. Donc $U_3 = \frac{1}{2}(X - 1)^2$.

On peut remarquer que c'est la base de Taylor en $\alpha = 1$.

3. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.

On a $P \in F^\perp$ ssi $\langle P | X \rangle = 0$

ssi $P(1).1 + P'(1).1 + P''(1).0 = 0$

ssi $(a + b + c) + (2a + b) = 0$ ssi $c = -3a - 2b$.

Donc $P = a(X^2 - 3) + b(X - 2)$. Puis $F^\perp = \text{Vect}(X - 2, X^2 - 3)$.

4. On a $X^2 = (X^2 - 3) - \frac{3}{2}(X - 2) + \frac{3}{2}X = \frac{3}{2}X + (X^2 - 3/2X) \in F \oplus F^\perp$.

Donc $p_F(X^2) = \frac{3}{2}X$ et $d(X^2, F) = \|X^2 - 3/2X\| = \sqrt{(-1/2)^2 + (1/2)^2 + 2^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Produit scalaire non canonique sur \mathbb{R}^2 .

Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $\langle u|v \rangle = 2u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + u_2v_2$ pour $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur E .
2. Déterminer une base orthonormée de E .
3. Déterminer la distance de $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ à l'axe des abscisses.

1. Bilinéaire On a :

$$\begin{aligned} \langle u + \lambda v | w \rangle &= 2(u_1 + \lambda v_1)w_1 - (u_1 + \lambda v_1)w_2 - (u_2 + \lambda v_2)w_1 + (u_2 + \lambda v_2)w_2 \\ &= (2u_1)w_1 - (u_1)w_2 - (u_2)w_1 + (u_2)w_2 + \lambda(2v_1)w_1 - (v_1)w_2 - (v_2)w_1 + (v_2)w_2 \\ &= \langle u | w \rangle + \lambda \langle v | w \rangle \end{aligned}$$

Symétrique On a :

$$\langle v | u \rangle = 2v_1u_1 - v_1u_2 - v_2u_1 + v_2u_2 = \langle u | v \rangle$$

Donc on en déduit la linéarité à droite.

Définie positive On a :

$$\langle u | u \rangle = 2u_1^2 - u_1u_2 - u_2u_1 + u_2^2 = u_1^2 + (u_1 - u_2)^2 \geq 0$$

Puis si $\langle u | u \rangle = 0$ alors :

$$u_1^2 = (u_1 - u_2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_1 & = 0 \\ u_1 - u_2 & = 0 \end{cases} \Rightarrow u_1 = u_2 = 0$$

Donc $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique (e_1, e_2) .

On a $\|e_1\|^2 = 1^2 + (1-0)^2 = 2$ donc $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Puis $\tilde{b}_2 = e_2 - \langle e_2 | b_1 \rangle b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Puis $b_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ car $\|\tilde{b}_2\|^2 = (-1)^2 + (-1-1)^2 = 5$.

3. Notons $A = \text{Vect}(e_1)$ l'axe des abscisses.

La famille (b_1) est une base orthonormée de A . De plus $A^\perp = \text{Vect}(b_2)$.

On a $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} \in A \oplus A^\perp$.

Donc $d(u, A) = \left\| \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-y)^2 + (-y+y)^2} = \sqrt{5}|y|$.

Symétrie orthogonale

On considère $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x+2y+2z \\ 2x+y-2z \\ 2x-2y+z \end{pmatrix}$.

1. Montrer que s est une symétrie vectorielle.
2. Déterminer ses espaces propres $E_1 = \text{Ker}(s - id_E)$ et $E_2 = \text{Ker}(s + id_E)$.
3. Montrer que E_1 et E_2 sont supplémentaires orthogonaux dans \mathbb{R}^3 .
4. Déterminer $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$ compatible à cette décomposition. Ecrire la matrice de passage P avec la base canonique \mathcal{B}_0 .
5. On note $S = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(s)$ et $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$. Préciser le lien entre les matrices S, D et P .

Que peut-on remarquer sur leurs transposées S^T, D^T et P^T ?

1. s est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

De plus $S^2 = I_3$. Donc s est un endomorphisme qui vérifie $s^2 = id_E$.

C'est à dire une symétrie vectorielle.

2. On a $S - I_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $E_1 = \text{Ker}(s - id_E) = \left\{ \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ pour } y, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

De même $S + I_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $E_2 = \text{Ker}(s + id_E) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} \text{ pour } z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

3. D'après le cours sur les symétries vectorielles, on a déjà $E = E_1 \oplus E_2$. Il suffit d'avoir $E_1 \perp E_2$. Notons $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ la base de E_1 . Notons $e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ la base de E_2 . On a $e_3 \perp e_1$ et $e_3 \perp e_2$ (par calcul immédiat).

On en déduit que $e_3 \in \text{Vect}(e_1, e_2)^\perp$ puis que $E_2 = \text{Vect}(e_3) \subset E_1^\perp$.

Il y a donc égalité $E_2 = E_1^\perp$ par dimension.

4. On a $E_1 = \text{Vect}(e_1, e_2)$. On orthonormalise cette base de E_1 .

On en déduit $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De même $E_2 = \text{Vect}(e_3)$. On en déduit $u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $P = \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

5. On a $S = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(1, 1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On remarque que $S^T = S$ et $D^T = D$ sont des matrices symétriques.

Et $P^{-1} = \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = P^T$ est une matrice orthogonale.