

TD 23 - Corrigé

Exo 1 : 1. On a $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (2 + 2t, t^2)$ est un arc paramétré de classe C^∞ .

Donc par composée $g(t) = f \circ \gamma$ est de classe C^1 et d'après la règle de la chaîne :

$$\begin{aligned} g'(t) &= x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \\ &= 2 \frac{\partial f}{\partial x}(2 + 2t, t^2) + 2t \frac{\partial f}{\partial y}(2 + 2t, t^2). \end{aligned}$$

2. Les fonctions $\varphi : (u, v) \mapsto uv$ et $\psi : (u, v) \mapsto u^2 + v^2$ sont de classe C^1 . Donc par composée h est de classe C^1 .

$$\text{On a : } \frac{\partial h}{\partial u}(u, v) = v \frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2 + v^2) + 2u \frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2 + v^2)$$

$$\text{Et : } \frac{\partial h}{\partial v}(u, v) = u \frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2 + v^2) + 2v \frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2 + v^2).$$

Exo 2 : On note $\Delta = \{(x, x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}\}$ la première diagonale. La fonction est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 - \Delta$.

La fonction est continue sur Δ car $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} g(x, y) = f'(a) = g(a, a)$.

De plus si $x \neq y$ alors :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{f'(x)(x-y) - (f(x) - f(y))}{(x-y)^2} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{f'(y)(y-x) - (f(y) - f(x))}{(y-x)^2}.$$

On étudie le prolongement par continuité en (a, a) de ses deux fonctions.

$$\begin{aligned} \text{On a } \frac{\partial g}{\partial x}(a + h_1, a + h_2) &= \frac{f'(a+h_1)(h_1-h_2) - f(a+h_1) + f(a+h_2)}{(h_1-h_2)^2} \\ &\sim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \frac{(f'(a) + h_1 f''(a))(h_1-h_2) - f(a) - h_1 f'(a) - h_1^2 f''(a)/2 + f(a) + h_2 f'(a) + h_2^2 f''(a)/2}{(h_1-h_2)^2} \text{ (Taylor-Young)} \\ &\sim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \frac{f''(a)(h_1^2 - 2h_1 h_2 + h_2^2)/2}{(h_1-h_2)^2} \rightarrow \frac{f''(a)}{2}. \end{aligned}$$

Par symétrie, on trouve également que $\frac{\partial g}{\partial y}(a + h_1, a + h_2) \rightarrow \frac{f''(a)}{2}$.

Donc les dérivées partielles se prolongent par continuité et g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exo 3 : Par opération f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

On note $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$ puis $g(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$.

$$\text{On a } g(r, \theta) = \frac{\rho^2 \cos^2 \theta}{\rho^{3/2}} = \sqrt{\rho} \cos^2 \theta.$$

Ainsi $\lim_{\rho \rightarrow 0} g(r, \theta) = 0$ donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

Donc f se prolonge par continuité en $(0, 0)$.

$$\text{On a } \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \frac{x}{(x^2 + 0^2)^{3/4}} = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \rightarrow +\infty \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ n'existe pas en } (0, 0).$$

$$\text{Et } \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0 \rightarrow 0. \text{ Donc } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ existe en } (0, 0).$$

Exo 4 : La fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

$$\text{On a } g(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \frac{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}{\rho^2} = \frac{\sin(2\theta)}{2}.$$

Ainsi $f(x, x) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq f(0, 0)$ donc f n'est pas continue en $(0, 0)$.

$$\text{On a } \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0 \rightarrow 0. \text{ Donc } f \text{ admet des dérivées partielles dans les deux directions.}$$

La fonctions n'est pas C^1 car elle n'est pas C^0 .

Exo 5 : La fonction est définie sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } xy \neq 1\}$. C'est un ouvert qui est composé de trois composantes connexes : $D_0 = \{(x, y) \text{ tel que } xy < 1\}$, $D_+ = \{(x, y) \text{ tel que } xy > 1 \text{ et } x > 0\}$ et $D_- = \{(x, y) \text{ tel que } xy > 1 \text{ et } x < 0\}$.

La fonction f est de classe C^1 sur D et :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2} + 0 - \frac{1(1-xy)+y(x+y)}{(1-xy)^2} \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2} = 0.$$

Puis $f(x, y) = f(y, x)$ donc $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ par symétrie.

On en déduit que $\nabla f = (0, 0)$.

Pour $(a, b) \in D_0$, il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow D_0$ tel que $\gamma(0) = (0, 0)$ et $\gamma(1) = (a, b)$.

Donc $f(a, b) - f(0, 0) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int_0^1 (f \circ \gamma)'(t) dt = 0$ car $(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f | \gamma'(t) \rangle$ d'après la règle de la chaîne.

Ainsi $f(a, b) = f(0, 0) = 0$.

De même, si $(a, b) \in D_+$, alors $f(a, b) = f(\sqrt{3}, \sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$.

Et si $(a, b) \in D_-$ alors $f(a, b) = -\pi$ (On peut remarquer que $f(-x, -y) = -f(x, y)$.)

Exo 6 : On pose $g(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$.

La fonction g est de classe C^2 et :

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

$$\text{Or } \frac{\partial g}{\partial \theta} = -\rho \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \rho \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}.$$

$$\text{Et } \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = -\rho \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} - \rho \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} + \rho^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \rho} = \Delta f.$$

Or on a supposé $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = \Delta f = 0$.

On trouve $\frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \rho}$ une EDL d'ordre 1.

Donc $\frac{\partial g}{\partial \rho} = \frac{\lambda(\theta)}{\rho}$ avec $\lambda : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\lambda(0) = \lambda(2\pi)$.

Puis $g(\rho, \theta) = \lambda(\theta) \ln(\rho) + \mu(\theta)$ avec une nouvelle fonction indépendante de ρ .

On réalise la synthèse. $\frac{\partial g}{\partial \theta} = \lambda'(\theta) \ln(\rho) + \mu'(\theta) = 0$ indépendamment de ρ .

Donc $\lambda'(\theta) = \mu'(\theta) = 0$ et les fonctions sont constantes.

Ainsi $g(\rho, \theta) = a \ln(\rho) + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ puis $f(x, y) = \frac{a}{2} \ln(x^2 + y^2) + b$.

Exo 7 : On note $g(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$.

$$\text{On a } \frac{\partial g}{\partial \theta} = -\rho \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \rho \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Donc $g(\rho, \theta) = \varphi(\rho)$ est une constante suivant θ avec $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

Puis $f(x, y) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$ est bien l'ensemble des solutions.

Exo 8 : Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et posons $g(t) = f(tx_0, ty_0)$. La fonction g est de classe C^1 et

$$g'(t) = x_0 \frac{\partial f}{\partial x}(tx_0, ty_0) + y_0 \frac{\partial f}{\partial y}(tx_0, ty_0) = \frac{(tx_0)^4 + 2(ty_0)^4}{t} = (x_0^4 + 2y_0^4)t^3.$$

$$\text{Donc } g(t) = (x_0^4 + 2y_0^4) \frac{t^4}{4}.$$

$$\text{Donc } f(x_0, y_0) = g(1) = \frac{x_0^4 + 2y_0^4}{4}.$$

Exo 9 : Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x_0, y_0) \neq 0$. (Sinon f est la fonction nulle et la question est triviale)

On a $f(uvx_0, uv y_0) = p(u)f(vx_0, vy_0) = p(u)p(v)f(x_0, y_0)$ et $f(uvx_0, uv y_0) = p(uv)f(x_0, y_0)$.

Donc pour tout $u, v > 0$, $p(uv) = p(u)p(v)$.

En dérivant par rapport à u , on obtient $vp'(uv) = p'(u)p(v)$.

Donc p vérifie l'équation différentielle $tp'(t) = p'(1)p(t)$ en posant $(u, v) = (1, t)$ pour $t > 0$.

Puis $p(t) = Ct^\alpha$ avec $\alpha = p'(1)$ et $C \in \mathbb{R}$ en résolvant l'EDL1. De plus $p(1) = 1$ car $f(x, y) = p(1)f(x, y)$ donc $C = 1$.

Donc $p(t) = t^\alpha$.

($\Rightarrow$) On suppose f homogène. Donc $f(xt, yt) = t^\alpha f(x, y)$.

En dérivant par rapport à t , on obtient : $x \frac{\partial f}{\partial x}(xt, yt) + y \frac{\partial f}{\partial y}(xt, yt) = \alpha t^{\alpha-1} f(x, y)$. En posant $t = 1$, on obtient l'équation au dérivée partielle de l'énoncé.

($\Leftarrow$) Soit f une solution de $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f(x, y)$.

$$\text{On pose } g(x, y, t) = \frac{f(xt, yt)}{f(x, y)}.$$

$$\text{On a } \frac{\partial g}{\partial t} = \alpha \frac{f(xt, yt)}{tf(x, y)} = \frac{\alpha g(x, y, t)}{t}.$$

Donc $g(x, y, t) = C(x, y)t^\alpha$ avec $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

On en déduit $f(xt, yt) = C(x, y)t^\alpha f(x, y)$.

Puis $C(x, y) = 1$ en posant $t = 1$.

Donc f est bien homogène.

On note $h(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$.

On a $\frac{\partial g}{\partial \rho} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\alpha}{\rho} f(x, y)$.

Donc $\frac{\partial g}{\partial \rho} = \frac{\alpha}{\rho} g(\rho, \theta)$.

Donc $g(\rho, \theta) = C(\theta)\rho^\alpha$ avec $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et 2π -périodique.

Exo 10 : 1) On a $\nabla f = (4x^3 - 4(x - y), 4y^3 - 4(y - x))$.

On recherche les points critique $\nabla f = (0, 0)$.

On a $x^3 = x - y = -4y^3$ donc $y = -x$. Puis $x^3 = 2x$ donne $x \in \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

Ainsi les points critiques $(0, 0)$ avec $f(0, 0) = 0$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ avec $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ avec $f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$.

On a $f(x, y) + 8 = (x^2 - 2)^2 + (y^2 - 2)^2 + 2(x + y)^2 \geq 0$.

Donc il y a deux points qui atteignent le minimum et aucun maximum.

2) On a $\nabla g = (6x^2 + 2y, -2y + 2x)$.

Donc les points critique vérifie $x = y$ puis $3x^2 + x = 0$ donc $x \in \{0, -1/3\}$.

On a $(0, 0)$ avec $g(0, 0) = 1$ et $(-1/3, -1/3)$ avec $g(-1/3, -1/3) = 28/27 > 1$.

De plus, $g(t, 0) = 2t^3 + 1$ admet des limites infinies aux infinies. Donc f est non bornées.

Ce ne sont pas des extrema globaux.

On a $g(t, 0) - g(0, 0) = 2t^3$ change de signe au voisinage de $t = 0$ donc $(0, 0)$ n'est pas un extrema local.

Au voisinage de $(-1/3, -1/3)$, la Hessienne est $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

On obtient $g(-1/3 + h_x, -1/3 + h_y) = \frac{28}{27} + \frac{1}{2}(-4h_x^2 + 4h_x h_y - 2h_y^2) + o(\|h\|^2)$.

Puis $\frac{1}{2}(-4h_x^2 + 4h_x h_y - 2h_y^2) = -h_x^2 - (h_x + h_y)^2 < 0$. Donc $(-1/3, -1/3)$ est un maximum local.