

Corrigé du DS n°1 : Mathématiques

PCSI 1 — 14 septembre 2024

Exercice 1

1. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (x^2 + 1 = y) \Rightarrow (y = 1)$

Correction : L'assertion est **VRAIE**.

Montrons que $y = 0$ convient. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'assertion $x^2 + 1 = 0$ est fausse car pour tout $x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Par les propriétés des implications logiques, l'implication (Faux $\Rightarrow 0 = 1$) est toujours vraie. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 + 1 = 0) \Rightarrow (0 = 1)$ est vraie.

L'assertion est donc démontrée pour $y = 0$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}^+, x^2 = a + 1$

Correction : L'assertion est **FAUSSE**.

Sa négation est : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^+, x^2 \neq a + 1$.

Considérons $x = 0$. Soit $a \in \mathbb{R}^+$ (c'est-à-dire $a \geq 0$). Alors $a + 1 \geq 1$. Or $x^2 = 0^2 = 0 \neq a + 1$.

Ainsi, $x = 0$ constitue un contre-exemple, et la proposition initiale est fausse.

3. $\forall a \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 = a + 1$

Correction : L'assertion est **VRAIE**.

Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Alors $a + 1 \geq 1 > 0$. Le nombre $a + 1$ admet donc une racine carrée dans $\mathbb{R}$. En posant $x = \sqrt{a + 1} \in \mathbb{R}$, on a bien $x^2 = (\sqrt{a + 1})^2 = a + 1$.

4. $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k! \leq (n + 1)!$

Correction : L'assertion est **VRAIE**.

Montrons-le par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

— **Initialisation :** Pour $n = 0$, $\sum_{k=0}^0 k! = 0! = 1$ et $(0 + 1)! = 1! = 1$. L'inégalité $1 \leq 1$ est vraie.

— **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sum_{k=0}^n k! \leq (n + 1)!$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k! = \left(\sum_{k=0}^n k! \right) + (n + 1)! \leq (n + 1)! + (n + 1)! = 2 \times (n + 1)!$$

Comme $n \geq 0$, on a $n + 2 \geq 2$, d'où $2 \times (n + 1)! \leq (n + 2)(n + 1)! = (n + 2)!$.

On en déduit que $\sum_{k=0}^{n+1} k! \leq (n + 2)!$, ce qui conclut l'hérédité.

Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

1. $\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+7} = 1$

Correction : L'équation est définie pour les réels x vérifiant $3x-2 \geq 0$ et $x+7 \geq 0$, soit $x \geq \frac{2}{3}$. L'ensemble de définition est $\mathcal{D} = [\frac{2}{3}, +\infty[$.

Pour $x \in \mathcal{D}$:

$$\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+7} = 1 \iff \sqrt{3x-2} = 1 + \sqrt{x+7}$$

Les deux membres étant strictement positifs, on élève au carré :

$$3x-2 = (1 + \sqrt{x+7})^2 \iff 3x-2 = 1 + 2\sqrt{x+7} + x+7$$

$$\iff 2x-10 = 2\sqrt{x+7} \iff x-5 = \sqrt{x+7}$$

Une condition nécessaire pour qu'il y ait des solutions est $x-5 \geq 0$, soit $x \geq 5$. Pour $x \geq 5$, on élève de nouveau au carré :

$$(x-5)^2 = x+7 \iff x^2 - 10x + 25 = x+7 \iff x^2 - 11x + 18 = 0$$

Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = (-11)^2 - 4(1)(18) = 121 - 72 = 49 = 7^2$. Les racines sont :

$$x_1 = \frac{11-7}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{11+7}{2} = 9$$

Seule la valeur $x = 9$ vérifie la condition $x \geq 5$.

Conclusion : $\mathcal{S} = \{9\}$.

2. $x+2 < \sqrt{3x^2+6}$

Correction : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3x^2+6 > 0$, donc l'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$. Distinguons deux cas selon le signe du membre de gauche :

- **1^{er} cas :** $x+2 < 0$, c'est-à-dire $x < -2$. Le membre de gauche est strictement négatif tandis que $\sqrt{3x^2+6} > 0$. L'inégalité est toujours vérifiée. Donc $\mathcal{S}_1 =]-\infty, -2[$.
- **2^e cas :** $x+2 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -2$. Les deux membres étant positifs ou nuls, on peut élever au carré par stricte croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}^+$:

$$(x+2)^2 < 3x^2+6 \iff x^2+4x+4 < 3x^2+6 \iff 2x^2-4x+2 > 0 \iff 2(x-1)^2 > 0$$

L'inégalité $2(x-1)^2 > 0$ est vraie pour tout $x \neq 1$. Par conséquent, $\mathcal{S}_2 = [-2, 1[\cup]1, +\infty[$.

L'ensemble des solutions est la réunion $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Conclusion : $\mathcal{S} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

Exercice 3

Dans cet exercice, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\sum_{k=1}^n (2k-1)(k+3)$

Correction : Développons le terme général :

$$(2k-1)(k+3) = 2k^2 + 6k - k - 3 = 2k^2 + 5k - 3$$

Par linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)(k+3) = 2 \sum_{k=1}^n k^2 + 5 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 3$$

En utilisant les formules usuelles $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$:

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)(k+3) = 2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 5 \frac{n(n+1)}{2} - 3n$$

Factorisons par $\frac{n}{6}$:

$$\begin{aligned} &= \frac{n}{6} [2(n+1)(2n+1) + 15(n+1) - 18] \\ &= \frac{n}{6} [2(2n^2 + 3n + 1) + 15n + 15 - 18] = \frac{n}{6} [4n^2 + 21n - 1] \end{aligned}$$

Conclusion : $\sum_{k=1}^n (2k-1)(k+3) = \frac{n(4n^2+21n-1)}{6}$.

2. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+3)}$

Correction : Décomposons en éléments simples la fraction :

$$\frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right)$$

La somme devient, par télescopage :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+3)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+3} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} - \sum_{j=4}^{n+3} \frac{1}{j} \right) \end{aligned}$$

Les termes pour $j = 4, \dots, n+1$ s'annulent :

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6} - \frac{2n+5}{(n+2)(n+3)} \right) \\ &= \frac{5(n+2)(n+3) - 6(2n+5)}{12(n+2)(n+3)} = \frac{5n^2 + 25n + 30 - 12n - 30}{12(n+2)(n+3)} = \frac{5n^2 + 13n}{12(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

Conclusion : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)}$.

3. $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{n}{i} 2^j$

Correction : La somme peut s'écrire sous forme d'imbrication de deux sommes :

$$S = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j \binom{n}{i} 2^j = \sum_{j=0}^n 2^j \left(\sum_{i=0}^j \binom{n}{i} \right)$$

Intervertissons l'ordre de sommation ($\{(i, j) \mid 0 \leq i \leq j \leq n\} = \{(i, j) \mid 0 \leq i \leq n \text{ et } i \leq j \leq n\}$) :

$$S = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \binom{n}{i} 2^j = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\sum_{j=i}^n 2^j \right)$$

Calculons la somme géométrique :

$$\sum_{j=i}^n 2^j = 2^i \frac{2^{n-i+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2^i$$

Ainsi :

$$S = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (2^{n+1} - 2^i) = 2^{n+1} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i$$

D'après le binôme de Newton :

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = (1 + 1)^n = 2^n \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i = (1 + 2)^n = 3^n$$

D'où :

$$S = 2^{n+1} \times 2^n - 3^n = 2^{2n+1} - 3^n$$

Conclusion : $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{n}{i} 2^j = 2^{2n+1} - 3^n$.

Exercice 4

1.
$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x - y - z = 3 \end{cases}$$

Correction : Appliquons le pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 & (L_1) \\ x + 2y - z = 2 & (L_2) \\ 2x - y - z = 3 & (L_3) \end{cases}$$

Opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ y - 3z = 1 & (L'_2) \\ -3y - 5z = 1 & (L'_3) \end{cases}$$

Opération $L'_3 \leftarrow L'_3 + 3L'_2$:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ y - 3z = 1 \\ -14z = 4 \end{cases}$$

On remonte le système :

$$-14z = 4 \implies z = -\frac{2}{7}$$

$$y = 1 + 3z = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$$

$$x = 1 - y - 2z = 1 - \frac{1}{7} + \frac{4}{7} = \frac{10}{7}$$

Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{10}{7}, \frac{1}{7}, -\frac{2}{7} \right) \right\}$.

$$2. \begin{cases} 2x - 4y + 2z + xyz = 3 \\ x + y + z = -2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

Correction : Commençons par résoudre le sous-système linéaire formé par les équations (2) et (3) :

$$\begin{cases} x + y + z = -2 & (L_2) \\ x - 2y + z = 1 & (L_3) \end{cases}$$

En soustrayant $(L_2) - (L_3)$, on obtient : $3y = -3 \implies y = -1$. Substituons $y = -1$ dans (L_2) :

$$x - 1 + z = -2 \implies x + z = -1 \implies z = -1 - x$$

Substituons $y = -1$ et $z = -1 - x$ dans l'équation non linéaire (1) :

$$2x - 4(-1) + 2(-1 - x) + x(-1)(-1 - x) = 3$$

$$2x + 4 - 2 - 2x + x + x^2 = 3$$

$$x^2 + x + 2 = 3 \iff x^2 + x - 1 = 0$$

Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 1^2 - 4(1)(-1) = 5$. Les solutions pour x sont :

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

On en déduit les valeurs correspondantes pour $z = -1 - x$:

$$z_1 = -1 - \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$z_2 = -1 - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, -1, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right), \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, -1, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right) \right\}$.

Exercice 5

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons $|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$.

Correction : Fixons $x \in \mathbb{R}$ et procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, $|\sin(0)| = 0$ et $0 \times |\sin(x)| = 0$. L'inégalité $0 \leq 0$ est vérifiée.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$. D'après la formule d'addition du sinus :

$$\sin((n+1)x) = \sin(nx + x) = \sin(nx)\cos(x) + \cos(nx)\sin(x)$$

En utilisant l'inégalité triangulaire puis $|\cos(t)| \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$|\sin((n+1)x)| \leq |\sin(nx)\cos(x)| + |\cos(nx)\sin(x)| = |\sin(nx)| \cdot |\cos(x)| + |\cos(nx)| \cdot |\sin(x)|$$

$$|\sin((n+1)x)| \leq |\sin(nx)| + |\sin(x)|$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$|\sin((n+1)x)| \leq n|\sin(x)| + |\sin(x)| = (n+1)|\sin(x)|$$

Ce qui achève la démonstration de l'hérédité.

Conclusion : Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k} \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n$.

Correction : Procédons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $3^0 = 1$. La propriété est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $u_k = 3^k$.
Calculons u_{n+1} :

$$u_{n+1} = \frac{3}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $u_k u_{n-k} = 3^k \cdot 3^{n-k} = 3^n$. Par suite :

$$u_{n+1} = \frac{3}{n+1} \sum_{k=0}^n 3^n = \frac{3}{n+1} \times (n+1)3^n = 3 \times 3^n = 3^{n+1}$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n$.

Problème

1. Montrer que pour tout $n, k, i \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$\binom{n}{k} \binom{k}{i} = \binom{n}{i} \binom{n-i}{n-k}$$

Correction :

- Si $i > k$ ou $k > n$, un des coefficients binomial à gauche est nul, et le membre de droite l'est également. La relation est donc identiquement vérifiée ($0 = 0$).
- Supposons maintenant $0 \leq i \leq k \leq n$. Exprimons le terme de gauche en factorielles :

$$\binom{n}{k} \binom{k}{i} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{k!}{i!(k-i)!} = \frac{n!}{(n-k)!i!(k-i)!}$$

D'autre part, exprimons le terme de droite :

$$\binom{n}{i} \binom{n-i}{n-k} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{(n-i)!}{(n-k)!((n-i)-(n-k))!} = \frac{n!}{i!(n-k)!(k-i)!}$$

Les deux expressions sont rigoureusement identiques.

Conclusion : Pour tous $n, k, i \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k} \binom{k}{i} = \binom{n}{i} \binom{n-i}{n-k}$.

2. En déduire que pour tout $n, i \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=i}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{i} = \binom{n}{i} 0^{n-i}$$

Correction : Soient $n, i \in \mathbb{N}$. Si $i > n$, la somme est vide (égale à 0) et $0^{n-i} = 0$, l'égalité est triviale. Supposons $i \leq n$. En injectant la relation établie à la question 1 :

$$\sum_{k=i}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{i} = \sum_{k=i}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{i} \binom{n-i}{n-k}$$

Mettons $\binom{n}{i}$ en facteur de la somme :

$$= \binom{n}{i} \sum_{k=i}^n (-1)^{n-k} \binom{n-i}{n-k}$$

Posons le changement d'indice $j = n - k$. Lorsque k varie de i à n , j varie de $n - i$ à 0 :

$$= \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} (-1)^j 1^{(n-i)-j}$$

D'après la formule du binôme de Newton :

$$= \binom{n}{i} (-1 + 1)^{n-i} = \binom{n}{i} 0^{n-i}$$

Remarque : $0^{n-i} = 1$ si $n = i$, et $0^{n-i} = 0$ si $n > i$.

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} v_k$$

Montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} u_k$$

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimons la somme du membre de droite en utilisant la définition de u_k :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} u_k = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} v_i \right)$$

Inversons l'ordre des deux sommations. Les indices vérifient $0 \leq i \leq k \leq n$:

$$S_n = \sum_{i=0}^n v_i \left(\sum_{k=i}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{i} \right)$$

D'après le résultat de la question 2, la somme interne vaut $\binom{n}{i} 0^{n-i}$. Donc :

$$S_n = \sum_{i=0}^n v_i \binom{n}{i} 0^{n-i}$$

Or, $0^{n-i} = 0$ pour tout $i < n$, et $0^0 = 1$ pour $i = n$. Tous les termes de la somme s'annulent donc, à l'exception unique du terme $i = n$:

$$S_n = v_n \binom{n}{n} 0^0 = v_n \times 1 \times 1 = v_n$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} u_k$.