

Éléments de logique et de calcul

Révision de la semaine 1

Trigonométrie

Formules fondamentale, d'addition et d'arc double.

Formules de linéarisation et de factorisation.

Les nombres complexes

Généralités

Addition et produit dans $\mathbb{C}$, forme algébrique (ou cartésienne), parties réelle et imaginaire.

Conjugaison : compatibilité aux opérations.

Module

Définition via la forme algébrique et expression à l'aide du conjugué.

Compatibilité à la multiplication et passage à la puissance. Inégalité triangulaire.

Cercle trigonométrique $\mathbb{U}$

Notation $e^{i\theta}$, relations élémentaires de morphisme, inverse et opposé.

Formule d'Euler, formule de Moivre et utilisation pour la linéarisation.

Liste de Questions de cours :

1. Énoncer puis démontrer la formule du binôme de Newton : $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
2. Montrer que $\forall 0 \leq p \leq n, \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
3. Montrer que $\sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ impair}} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$.
4. Énoncer puis démontrer l'inégalité triangulaire : $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
5. Énoncer puis démontrer la compatibilité de la conjugaison aux passages à la puissance.
6. Calculer la somme $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$.

On demandera également, sans démonstration, de citer certaines formules de trigonométrie parmi : $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\cos(a) \cos(b)$, $\sin(a) \cos(b)$, $\sin(a) \sin(b)$, $\cos(p) + \cos(q)$, $\sin(p) + \sin(q)$.

Exercices du TD2 à préparer

1. Calcul élémentaire Exo1 Exo2 (Exo3)
2. Trigonométrie Exo4 Exo5

Exercices d'Application du Cours

1. Déterminer l'écriture exponentielle de $\frac{(\sqrt{3}-i)^{125}}{(2+2i)^{81}}$.
2. En écrivant $z = x + iy$, résoudre l'équation $z^2 = -40 + 42i$.
3. Calculer la somme $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{3}\right)$

Devoir libre

1. Soit $\omega = e^{2i\pi/5}$. On appelle A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 les points d'affixes respectives $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 - (a) On pose $u = \omega + \omega^4$ et $v = \omega^2 + \omega^3$. Démontrer que u et v sont les solutions de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.
 - (b) En déduire une valeur de $\cos(2\pi/5)$ à l'aide de radicaux.
 - (c) Déterminer l'affixe de H , le point d'intersection de (A_1A_4) avec l'axe des abscisses.
 - (d) Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω d'affixe $\frac{-1}{2}$ passant par le point B d'affixe i . Ce cercle coupe l'axe des abscisses en deux points M et N . On notera M le point d'affixe positive. Montrer que H est le milieu de $[OM]$. Déterminer l'affixe de N .
 - (e) Tracer la figure formée par les points de l'énoncé. Quel polygone régulier peut-on ainsi tracer à la règle et au compas ?