

Devoir Surveillé de Mathématiques n° 1

le samedi 19 Septembre 2026 - durée 3h

Les questions des exercices sont indépendantes.

Exercice 1 : Raisonnement par récurrence.

- Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$.
- On définit une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par $u_0 = 2, u_1 = 3$
et la relation de récurrence pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 1$.
- On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \geq 0}$ par $F_0 = 0, F_1 = 1$
et la relation de récurrence pour $n \in \mathbb{N}$: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$ et $F_{2n+2} = F_{n+2}^2 - F_n^2$.

Exercice 2 : Résoudre les équations et inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$:

- $\sqrt{3x-2} - \sqrt{2x+2} = 1$.
- $\frac{x^2}{2} > \frac{2-x^2}{1+x}$.
- $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 = 27$.
- $|\cos x - \frac{1}{2}| + |\cos x| = \frac{3}{2}$.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

- $\sum_{k=0}^n 2^{n-k} 3^{n+k} 5^{2k}$.
- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k 6^{2n-k} 7^{n-2k}$.
- $\sum_{k=1}^n k(k-1)(k-2)$.
- $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$.

Exercice 4 : Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x - y + z = -1 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases} & \text{b. } \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - 3y - z = 3 \\ 3x - 4y - 3z = 4 \end{cases} & \text{c. } \begin{cases} x(y+z) = 2 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + y - z = 1 \end{cases} \end{array}$$

Problème I : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

On propose de calculer les sommes $A_n = \sum_{k=0}^n \cos^2(kx)$ et $B_n = \sum_{k=1}^n \sin^2(kx)$.

- Calculer A_n et B_n lorsque $x \equiv 0[\pi]$.
- Calculer $A_n + B_n$.
- Montrer que $A_n - B_n = \sum_{k=0}^n \cos(2kx)$.
- Montrer que $2 \sin x \sum_{k=0}^n \cos(2kx) = \sin[(2n+1)x] + \sin[x]$.
- En déduire les valeurs simplifiées de A_n et B_n lorsque $x \not\equiv 0[\pi]$.

Problème II : Les trois questions sont indépendantes.

- On considère des entiers tels que $0 \leq i \leq j \leq n$.
 - Montrer que $\binom{n}{j} \binom{j}{i} = \binom{n}{i} \binom{n-i}{n-j}$.
 - En déduire la valeur de $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{n}{j} \binom{j}{i}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - Montrer que $n!n = (n+1)! - n!$ et $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$.
 - En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n k!k$ et $\sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
 - Montrer que $\sum_{k=1}^n H_k = (n+1)H_n - n$.
 - Calculer $\sum_{k=1}^n kH_k$ en fonction de n et H_n .