

DS de Mathématiques n° 1 - Corrigé

Exercice 1 : a. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$.

Initialisation. Pour $n = 2$, on a $\ln\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \ln(3/4)$.

Hérédité. Soit $n \geq 2$ tel que $\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n+1} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{2n} \cdot \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n^2 + 2n}{2(n+1)n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n+2}{2(n+1)}\right). \end{aligned}$$

Donc par principe de récurrence, on a bien démontré la formule pour tout $n \geq 2$.

b. On définit une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par $u_0 = 2, u_1 = 3$
et la relation de récurrence pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 1$.

On démontre la relation par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. La propriété est vraie au deux premier rang car $u_0 = 2^0 + 1$ et $u_1 = 2^1 + 1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 2^n + 1$ et $u_{n+1} = 2^{n+1} + 1$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n \\ &= 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 2^n + 3 - 2 \\ &= 2^{n+2} + 1. \end{aligned}$$

Donc par principe de récurrence, on a bien démontré la formule pour tout $n \geq 0$.

c. On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \geq 0}$ par $F_0 = 0, F_1 = 1$

et la relation de récurrence pour $n \in \mathbb{N}$: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$ et $F_{2n+2} = F_{n+2}^2 - F_n^2$.

Il est utile de calculer les premiers termes de la suite, dans l'ordre 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,

On démontre simultanément les deux propriétés par récurrence simple.

Initialisation. Pour $n = 0$, on a $F_1 = F_1^2 + F_0^2$ et $F_2 = F_2^2 - F_0^2$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$ et $F_{2n+2} = F_{n+2}^2 - F_n^2$. On a :

$$\begin{aligned} F_{2n+3} &= F_{2n+2} + F_{2n+1} \\ &= (F_{n+2}^2 - F_n^2) + (F_{n+1}^2 + F_n^2) \\ &= F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2. \end{aligned}$$

Ceci établit la première formule.

Puis d'une part :

$$\begin{aligned} F_{2n+4} &= F_{2n+3} + F_{2n+2} \\ &= 2F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2 - F_n^2 \\ &= 2F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2 - (F_{n+2} - F_{n+1})^2 \\ &= F_{n+2}^2 + 2F_{n+2}F_{n+1}. \end{aligned}$$

Et d'autre part : $F_{n+3}^2 - F_{n+1}^2 = (F_{n+2} + F_{n+1})^2 - F_{n+1}^2 = F_{n+2}^2 + 2F_{n+2}F_{n+1}$.

Ceci donne bien la seconde formule.

Exercice 2 : a. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3x-2} - \sqrt{2x+2} = 1$.

On résout l'équation par Analyse-Synthèse.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{3x-2} - \sqrt{2x+2} = 1$.

Alors $3x-2 = 1 + 2\sqrt{2x+2} + 2x+2$.

Puis $(x-5)^2 = 4(2x+2)$ donne le polynôme $0 = x^2 - 18x + 17 = (x-1)(x-17)$.

Puis on vérifie que 17 est solution mais pas 1. Ainsi $\mathcal{S}_a = \{17\}$.

b. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{x^2}{2} > \frac{2-x^2}{1+x}$.

On peut étudier le signe de $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{2-x^2}{1+x}$ pour $x \neq -1$.

On a $f(x) = \frac{x^2(1+x)-2(2-x^2)}{2(1+x)} = \frac{x^3+3x^2-4}{2(x+1)}$.

Puis le numérateur :

$$x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x^2 + 4x + 4) = (x-1)(x+2)^2$$

change de signe uniquement en $x = 1$ mais s'annule en $x = -2$.

Donc l'ensemble solution est $\mathcal{S}_b =]-\infty, -2[\cup]-2, -1[\cup]1, +\infty[$.

c. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 = 27$.

On peut raisonner par équivalence successive en remarquant une formule du Binôme de Newton.

$$x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 = (x^2 - 1)^3$$

Ainsi $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 = 27$ ssi $(x^2 - 1)^3 = 3^3$ ssi $x^2 - 1 = 3$.

ssi $x^2 = 4$ ssi $x \in \{-2, 2\}$.

d. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $|\cos x - \frac{1}{2}| + |\cos x| = \frac{3}{2}$.

On peut réaliser un changement d'inconnue $y = \cos x$ et faire une disjonction.

1er cas : $y \geq 1/2$ On a $(y - 1/2) + y = 3/2$ ssi $y = 1$.

2eme cas : $0 \leq y < 1/2$ On a $(1/2 - y) + y = 3/2$ ssi $1 = 3$ (pas de solution)

3eme cas : $y < 0$ On a $(1/2 - y) + (-y) = 3/2$ ssi $y = -\frac{1}{2}$.

Ainsi $y \in \{-1/2, 1\}$ puis $x \in \{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Calculer $\sum_{k=0}^n 2^{n-k} 3^{n+k} 5^{2k}$.

On utilise la formule de factorisation $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n 2^{n-k} 3^{n+k} 5^{2k} &= 3^n \sum_{k=0}^n (3 \cdot 5^2)^k 2^{n-k} \\ &= 3^n \frac{75^{n+1} - 2^{n+1}}{75 - 2} \\ &= \frac{3^n}{73} (75^{n+1} - 2^{n+1}). \end{aligned}$$

b. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k 6^{2n-k} 7^{n-2k}$.

On utilise la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k 6^{2n-k} 7^{n-2k} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k (6 \times 7^2)^{n-k} 6^n 7^{-n} \\ &= (3 + 294)^n 6^n 7^{-n} \\ &= \left(\frac{1782}{7}\right)^n. \end{aligned}$$

c. Calculer $\sum_{k=1}^n k(k-1)(k-2)$

On utilise la linéarité et les formules de référence

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n k(k-1)(k-2) &= \sum_{k=1}^n (k^3 - 3k^2 + 2k) \\
 &= \sum_{k=1}^n k^3 - 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k \\
 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)[n(n+1) - 2(2n+1) + 4]}{4} \\
 &= \frac{n(n+1)(n^2 - 3n + 2)}{4} \\
 &= \frac{n(n+1)(n-1)(n-2)}{4}.
 \end{aligned}$$

d. Calculer $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$

On calcule la somme triangulaire

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j i \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \frac{j(j+1)}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 1 \\
 &= \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2} n \\
 &= \frac{n(n+3)}{4}.
 \end{aligned}$$

Exercice 4 : Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{aligned}
 \text{a. } \begin{cases} x - y + z &= -1 \\ 2x + y - z &= 4 \\ x - 2y - z &= 0 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z &= -1 \\ 3y - 3z &= 6 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -y - 2z &= 1 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z &= -1 \\ y - z &= 2 \quad L_2 \leftarrow L_2/3 \\ -3z &= 3 \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow (x, y, z) = (1, 1, -1)
 \end{aligned}$$

L'unique solution du système est $(1, 1, -1)$.

$$\text{b. } \begin{cases} x - 2y + z &= 1 \\ 2x - 3y - z &= 3 \\ 3x - 4y - 3z &= 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z &= 1 \\ y - 3z &= 1 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 2y - 6z &= 1 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z &= 1 \\ y - 3z &= 1 \\ 0 &= -1 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}.$$

Le système n'admet pas de solution.

- c. On note $u = 2x$ et $v = y + z$. On résout le sous-système somme-produit $\begin{cases} uv &= 4 \\ u + v &= 4 \end{cases}$.

Ainsi $\{u, v\}$ sont les racines de $X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$ i.e $u = v = 2$.

$$\text{Donc } \begin{cases} x(y + z) &= 2 \\ 2x + y + z &= 4 \\ 3x + y - z &= 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x &= 2 \\ y + z &= 2 \\ 3x + y - z &= 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 1 \\ y + z &= 2 \\ y - z &= -2 \end{cases}.$$

La solution du système somme-différence en (y, z) est $(0, 2)$.

Le système de l'énoncé admet une unique solution $(1, 0, 2)$.

Problème I : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer A_n et B_n lorsque $x \equiv 0[\pi]$.

On traite deux cas $x \equiv 0[2\pi]$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\cos(kx) = 1$ et $\sin(kx) = 0$. Donc $A_n = n + 1$ et $B_n = 0$.

Lorsque $x \equiv \pi[2\pi]$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\cos(kx) = (-1)^k$ et $\sin(kx) = 0$. Donc $A_n = \sum_{k=0}^n [(-1)^k]^2 = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1$ et $B_n = 0$.

Ainsi dans tous les cas $A_n = n + 1$ et $B_n = 0$.

2. Calculer $A_n + B_n$.

On a $A_n + B_n = \left(\sum_{k=0}^n \cos^2(kx) + \sin^2(kx) \right) - \sin^2(0)$
 $= \sum_{k=0}^n 1 - 0 = n + 1$ car $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

3. Montrer que $A_n - B_n = \sum_{k=0}^n \cos(2kx)$.

On a $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$.

Ainsi $A_n - B_n = \left(\sum_{k=0}^n \cos^2(kx) - \sin^2(kx) \right) + \sin^2(0) = \sum_{k=0}^n \cos(2kx)$

4. Montrer que $2 \sin x \sum_{k=0}^n \cos(2kx) = \sin[(2n + 1)x] - \sin[x]$.

On a :

$$\begin{aligned} 2 \sin x \cos(2kx) &= \sin(x + 2kx) + \sin(x - 2kx) \\ &= \sin[(2k + 1)x] - \sin[(2k - 1)x]. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 2 \sin x \sum_{k=0}^n \cos(2kx) &= \sum_{k=0}^n 2 \sin x \cos(2kx) \\
 &= \sum_{k=0}^n (\sin[(2k+1)x] - \sin[(2k-1)x]) \\
 &= \sin[(2n+1)x] - \sin[-x] \text{ par télescopage} \\
 &= \sin[(2n+1)x] + \sin x.
 \end{aligned}$$

5. En déduire les valeurs simplifiées de A_n et B_n lorsque $x \neq 0[\pi]$.

On suppose que $x \neq 0[\pi]$ ainsi $\sin x \neq 0$ et $A_n - B_n = \frac{\sin[(2n+1)x]}{2 \sin x} + \frac{1}{2}$

Et on a :

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{1}{2} ((A_n + B_n) + (A_n - B_n)) \\
 &= \frac{1}{2} \left((n+1) + \frac{\sin[(2n+1)x]}{2 \sin x} + \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{2n+3}{4} + \frac{\sin[(2n+1)x]}{4 \sin x}.
 \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
 B_n &= \frac{1}{2} ((A_n + B_n) - (A_n - B_n)) \\
 &= \frac{2n+1}{4} - \frac{\sin[(2n+1)x]}{4 \sin x}
 \end{aligned}$$

Problème II : 1. On considère des entiers tels que $0 \leq i \leq j \leq n$.

(a) Montrer que $\binom{n}{j} \binom{j}{i} = \binom{n}{i} \binom{n-i}{n-j}$.

$$\text{On a } \binom{n}{j} \binom{j}{i} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{j!}{i!(j-i)!} = \frac{n!}{(n-j)! i! (j-i)!}.$$

$$\text{Et } \binom{n}{i} \binom{n-i}{n-j} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{(n-i)!}{(n-j)!((n-i)-(n-j))!} = \frac{n!}{i!(n-j)! (j-i)!}.$$

$$\text{Donc } \binom{n}{j} \binom{j}{i} = \binom{n}{i} \binom{n-i}{n-j}.$$

(b) En déduire la valeur de $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{n}{j} \binom{j}{i}$.

Donc :

$$\begin{aligned}
 \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{n}{j} \binom{j}{i} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \binom{n}{i} \binom{n-i}{n-j} \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} \text{ avec } k = n-j \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^{n-i} \\
 &= (1+2)^n = 3^n \text{ d'après la FBN.}
 \end{aligned}$$

2. (a) Montrer que $n!n = (n+1)! - n!$ et $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$.

$$\text{On a } (n+1)! - n! = n![n+1-1] = n!n.$$

$$\text{Et } \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}.$$

- (b) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n k!k$ et $\sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!}$.

On peut effectuer des télescopes des sommes :

En effet $\sum_{k=0}^n k!k = \sum_{k=0}^n (k+1)! - k! = (n+1)! - 1$.

Et $\sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- (a) Montrer que $\sum_{k=1}^n (H_k + 1) = (n+1)H_n$.

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n H_k &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} \frac{1}{i} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n \frac{1}{i} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{n-i+1}{i} \\ &= (n+1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^n 1 \\ &= (n+1)H_n - n. \end{aligned}$$

Donc $\sum_{k=1}^n (H_k + 1) = (n+1)H_n$.

- (b) Calculer $\sum_{k=1}^n kH_k$ en fonction de n et H_n .

De même :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n kH_k &= \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} k \frac{1}{i} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \sum_{k=i}^n k \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \left(\sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^{i-1} k \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(i-1)i}{2} \right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} H_n - \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} H_n - \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} - n \right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} H_n - \frac{n(n-1)}{4}. \end{aligned}$$