

Les nombres complexes

Révision de la semaine 2

Argument et forme trigonométrique

Notation $\text{Arg}(z)$ pour $z \in \mathbb{C}^*$ comme une mesure de l'angle modulo 2π .

Formule de l'argument d'un produit, d'un quotient et du conjugué.

Ecriture trigonométrique (ou polaire ou exponentielle).

Application à : $a \cos(t) + b \sin(t) = A \cos(t - \varphi)$.

Résolution d'équations

Détermination des racines carrées d'un nombre complexe sous forme trigo ou algébrique.

Application à la recherche des racines d'un trinôme à coefficients quelconques.

Racines n -ième de l'unité (noté $\mathbb{U}_n$) et résolution de l'équation $z^n = \rho e^{i\theta}$.

La fonction $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Résolution dans $\mathbb{C}$ de $e^z = a$ où $a \in \mathbb{C}^*$.

Liste de Questions de cours :

- Enoncer puis démontrer l'inégalité triangulaire : $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
- Enoncer puis démontrer la compatibilité de la conjugaison aux passages à la puissance.
- Calculer la valeur de $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
- Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $\exp(z) = 3 - i\sqrt{3}$.
- Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- Enoncer puis démontrer la paramétrisation de $\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n} \text{ pour } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$.

Exercices du TD2 à préparer

1. Résolution d'équations Exo8 (Exo9)
2. Racine n -ième Exo10 (Exo11)

Exercices d'Application du Cours

1. Résoudre l'équation $z^2 - 3(1+i)z + 4i = 0$ sur $\mathbb{C}$.
2. Résoudre l'équation $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$ sur $\mathbb{C}$.
3. Résoudre l'équation $e^z + e^{-z} = \frac{3+i}{2}$ sur $\mathbb{C}$.

Devoir libre

1. Soit $n \geq 2$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$ une racine n -ième de 1.
 - (a) Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$ et $\prod_{k=0}^{n-1} \omega^k$.
 - (b) En simplifiant $(1-\omega) \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k$, déterminer la valeur de $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k$.
 - (c) Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega^k$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u = e^{i\varphi} \in \mathbb{U}$.

On note $A = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } z^n = u\}$.

Dans chacune des questions, on recherche un ensemble géométrique décrit par une équation cartésienne à préciser.

- (a) Déterminer un cercle qui contient A .
- (b) On note $B = \{(1+i)z - 1 \text{ pour } z \in A\}$. Déterminer un cercle qui contient B .
- (c) On note $C = \{(1+z)^n \text{ pour } z \in A\}$. Déterminer une droite qui contient C .