

Les nombres complexes

Révision de la semaine 3

Représentation géométrique

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthogonal. Le plan vectoriel associé est noté $\vec{P}$.

Affixe d'un point ou d'un vecteur. Les angles sont des arguments de quotient.

CNS sur les affixes de deux vecteurs colinéaires, trois points alignés, deux vecteurs orthogonaux.

Correspondances sur les affixes des translations, homothéties, rotations et de la réflexion $z \mapsto \bar{z}$.

Fonctions d'une variable réelle

Formalisme sur les applications

Composition, restriction et prolongement.

Image directe et réciproque d'un ensemble, notée $f^*(B) = \{x \in E \text{ tel que } f(x) \in B\}$.

L'image réciproque conserve les unions et les intersections.

Injection, Surjection et Bijection

La composée de deux injections (resp. surjections, bijections) l'est aussi.

La formule $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ pour f et g bijectives.

Théorème de la bijection continue. (Admis à ce stade)

Liste de questions de cours :

- a) Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $\exp(z) = 3 - i\sqrt{3}$.
- b) Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- c) Énoncer puis démontrer la paramétrisation de $\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n} \text{ pour } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$.
- d) Déterminer la composée $R_2 \circ R_1$ avec R_1 la rotation d'angle $\pi/4$ et de centre $A_1(0, 1)$ et R_2 la rotation d'angle $-\pi/4$ et de centre $A_2(1, 0)$.
- e) Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t - \frac{1}{t} \end{array}$ est une bijection et préciser la bijection réciproque.
- f) Démontrer que la composée de deux injections (resp. surjections, bijections) est une injection (resp. surjection, bijection).

Exercices du TD3 à préparer

1. Equation avec des fonctions Exo1
2. Etude de fonctions Exo2

Exercices d'Application du Cours

1. Etudier les variations de la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^x$.
2. Montrer que $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow]1, +\infty[, x \mapsto \frac{e^x}{e^x - 1}$ est une bijection.
Préciser la bijection réciproque.
3. On considère $h : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[, x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.
Etudier ses variations et montrer qu'elle réalise une bijection.

Devoir libre

1. On considère l'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^3$.
 - (a) Montrer que f est surjective mais pas injective.
 - (b) Montrer que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $f(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$.
 - (c) Montrer que $f^*(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup j\mathbb{R} \cup j^2\mathbb{R}$.
 - (d) On note $A = \{z \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } \text{Arg}(z) \in [0, \frac{2\pi}{3}[+ 2\pi\mathbb{Z}\}$.
Montrer que la restriction $g = f|_A^{\mathbb{C}^*} : A \rightarrow \mathbb{C}^*$ est une bijection.