

Fonctions d'une variable réelles

Révision de la semaine 4

Fonctions de classe C^n pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Stabilité des classes par les opérations.

Formule de Leibniz.

Caractère C^n de la bijection réciproque sous condition sur la dérivée première.

Fonctions usuelles de classe C^∞

Les polynômes et les fractions rationnelles.

Les fonctions $\exp$, $\ln$, $\log_b$, $x \mapsto b^x$ et $x \mapsto x^\alpha$.

Les fonctions ch , sh et th .

Les fonctions $\cos$, $\sin$, $\tan$ et leurs réciproques.

Liste de Questions de cours :

- a) Déterminer la composée $R_2 \circ R_1$ avec R_1 la rotation d'angle $\pi/4$ et de centre $A_1(0, 1)$ et R_2 la rotation d'angle $-\pi/4$ et de centre $A_2(1, 0)$.
- b) Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t - \frac{1}{t} \end{array}$ est une bijection et préciser la bijection réciproque.
- c) Démontrer que la composée de deux injections (resp. surjections, bijections) est une injection (resp. surjection, bijection).
- d) Énoncer puis démontrer la formule de la dérivée première d'un produit.
- e) En tant que bijection réciproque, démontrer que la fonction Arcsin est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$ et calculer sa dérivée première.
- f) Montrer que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $] -1, 1[$. En calculant sa dérivée, montrer que $\operatorname{th}^{-1}(y) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right)$.

Exercices du TD3 à préparer

1. Fonctions de référence Exo3 Exo4
2. Calcul de dérivées Exo5 Exo6

Exercices d'Application du Cours

1. Déterminer les domaines de dérivation et les dérivées premières des fonctions :
 - (a) $f(x) = \operatorname{Arcsin}(\sqrt{x+1} - 1)$
 - (b) $g(x) = \ln(\operatorname{ch}(2x)) + \ln(\operatorname{sh}(2x))$
 - (c) $h(x) = x^{\ln x}$.
2. Déterminer les domaines de dérivation et les dérivées n -ième des fonctions :
 - (a) $f(x) = (x-1)^2(x^2 + 3x - 1)$
 - (b) $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$
 - (c) $h(x) = x^2 \cos(3x)$.

Devoir libre

1. On considère $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.
 - (a) Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
 - (b) Sur quel domaine la fonction f est-elle dérivable? Calculer f' .
 - (c) En déduire que $f(x) = 2\operatorname{Arctan}(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.
 - (d) Déterminer une expression de f sur $]1, +\infty[$ et sur $] -\infty, -1[$.
 - (e) Montrer que f n'est pas dérivable en 1 et -1 .
 - (f) Tracer la courbe représentative de f (échelle : unité = 3cm).
On précisera les tangentes obtenues en 0, $\pm\sqrt{3} \approx \pm 1.73$ et $\pm 1/\sqrt{3} \approx \pm 0.57$.