

Calcul de sommes avec $\mathbb{U}_n$

Soit $n \geq 2$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$ une racine n -ième de 1.

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$ et $\prod_{k=0}^{n-1} \omega^k$.
2. En simplifiant $(1 - \omega) \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k$, déterminer la valeur de $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k$.
3. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega^k$.

1. On a $\omega^n = 1$ et $\omega \neq 1$, donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = \frac{1 - 1}{1 - \omega} = 0.$$

D'autre part, on a :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = \omega^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = \omega^{\frac{n(n-1)}{2}} = \exp\left(\frac{2i\pi}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2}\right) = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1}.$$

2. On a :

$$\begin{aligned} (1 - \omega) \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k - (k+1)\omega^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k\omega^k - (k+1)\omega^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k \\ &= (0\omega^0 - n\omega^n) + 0 = -n. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k = \frac{-n}{1 - \omega} = \frac{n}{\omega - 1}.$$

3. Par la formule du binôme de Newton,

$$(1 + \omega)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \omega^k.$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega^k = (1 + \omega)^n - \omega^n = (1 + \omega)^n - 1.$$

On a $1 + \omega = 1 + e^{2i\pi/n} = 2e^{i\pi/n} \cos(\pi/n)$. Ainsi :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega^k = -2^n \cos^n(\pi/n) - 1.}$$

Géométrie sur $\mathbb{C}$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u = e^{i\varphi} \in \mathbb{U}$.

On note $A = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } z^n = u\}$.

Dans chacune des questions, on recherche un ensemble géométrique décrit par une équation cartésienne à préciser.

1. Déterminer un cercle qui contient A .
2. On note $B = \{(1+i)z - 1 \text{ pour } z \in A\}$. Déterminer un cercle qui contient B .
3. On note $C = \{(1+z)^n \text{ pour } z \in A\}$. Déterminer une droite qui contient C .

1. On peut résoudre l'équation $z^n = u = e^{i\varphi}$ par $z = \exp\left(i\frac{2k\pi+\varphi}{n}\right)$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Donc $A \subset \mathbb{U}$ est inclus dans le cercle unité d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

2. L'application $z \mapsto (1+i)z - 1$ est la composée d'une rotation d'angle θ et d'une homothétie de rapport λ . Le centre de la rotation est le point fixe $z = (1+i)z - 1$ ssi $iz = 1$ ssi $z = -i$. Le point de coordonnées $(0, -1)$. Le coefficient dominant est $(1+i) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Donc $\lambda = \sqrt{2}$ et $\theta = \pi/4$.

Ainsi le cercle unité qui contient A devient un autre cercle qui contient B . Le nouveau centre est l'image de 0 c'est à dire -1 de coordonnées $(-1, 0)$ et le nouveau rayon est augmenté de $\sqrt{2}$ par homothétie (la rotation ne change pas la taille du cercle).

Ainsi B est contenu dans le cercle de centre $(-1, 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$
d'équation $(x+1)^2 + y^2 = 2$.

3. On peut calculer $c_k = (1+z_k)^n = (1+e^{i\varphi_k})^n = 2^n \cos^n(\varphi_k/2) e^{in\varphi_k/2}$ avec $\varphi_k = \frac{2k\pi+\varphi}{n}$.

On trouve ainsi $c_k = 2^n \cos^n(\varphi_k/2) (-1)^k e^{i\varphi/2}$. En particulier, $\text{Arg}(c_k) = \varphi/2 + \pi k$ est constant.

Donc les points de C sont sur la droite qui passe par $(0, 0)$ et $(\cos(\varphi/2), \sin(\varphi/2))$
d'équation $y \cos(\varphi/2) - x \sin(\varphi/2) = 0$.