

Fonctions d'une variable réelle

Révision de la semaine 5

Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Equivalence pour la dérivabilité et la classe avec celles des fonctions $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.

Stabilité des classes C^n d'une somme, d'une combinaison linéaire et d'un produit.

Dérivabilité et classe de $g \circ f$ avec $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $f(I) \subset J$.

Dérivabilité et classe de $\exp(\varphi)$ avec $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$.

Calcul de primitives

Les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Primitives de référence

$t \mapsto \exp(\lambda t)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$.

$t \mapsto t^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, $t \mapsto \frac{1}{t-a}$ pour $a \in \mathbb{R}$.

$t \mapsto \cos(t)$, $t \mapsto \sin(t)$, $t \mapsto \tan(t)$,

$t \mapsto \frac{1}{\tan(t)}$, $t \mapsto \frac{1}{\cos^2 t}$, $t \mapsto \frac{1}{\sin^2 t}$.

$t \mapsto \frac{1}{\cos(t)}$, $t \mapsto \frac{1}{\sin(t)}$.

Primitives des fractions rationnelles

Primitive de $t \mapsto \frac{1}{(t-\alpha)^2+\beta^2}$ et $t \mapsto \frac{t-\alpha}{(t-\alpha)^2+\beta^2}$

Existence de primitives

Intégrale de Riemann sur un segment $[a, b]$ sans construction à ce stade.

Relation de Chasles et linéarité de l'intégrale.

Théorème fondamental, existence d'une primitive d'une fonction continue sur un intervalle.

Techniques de calcul intégral

Intégration par parties.

Changement de variables.

Liste de Questions de cours :

- Enoncer puis démontrer la formule de la dérivée première d'un produit.
- En tant que bijection réciproque, démontrer que la fonction Arcsin est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$ et calculer sa dérivée première.
- Montrer que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $] -1, 1[$. En calculant sa dérivée, montrer que $\operatorname{th}^{-1}(y) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right)$.
- Enoncer puis démontrer le caractère C^n d'une bijection réciproque.
- Enoncer et démontrer la formule d'intégration par parties puis calculer $\int_0^x \operatorname{Arctan}(t) dt$.
- Enoncer et démontrer la formule de changement de variables puis calculer $\int_0^x \frac{1}{1+e^t} dt$.

Exercices du TD4 à préparer

1. Calcul de primitives Exo1 Exo6
2. Intégration par parties Exo2 Exo3
3. Changement de variables Exo4 Exo5

Exercices d'application du cours

1. Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

- (a) $f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x^2+x-2}$
- (b) $g(x) = e^{-2x} \cos(x)$
- (c) $h(x) = \frac{x^2+2x}{\sqrt{x+1}}$

2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

- (a) $\int_0^{\pi/2} x \cos(x) dx$
- (b) $\int_0^1 (x^2 + x + 1)e^{-x} dx$
- (c) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$

3. Calculer à l'aide d'un changement de variable :

- (a) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$ avec $u = \ln x$
- (b) $\int_0^1 e^x \sqrt{e^x + 3} dx$ avec $u = e^x$
- (c) $\int_0^3 \frac{x^2+2x}{\sqrt{x+1}} dx$ avec $u = \sqrt{x+1}$

Devoir libre

1. On recherche à calculer $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) dx$.

- (a) Montrer que, pour $x \in [0, \pi/4]$, $\tan(\pi/4 - x) = \frac{1 - \tan(x)}{1 + \tan(x)}$.
- (b) Avec le changement de variable $u = \pi/4 - x$, montrer que $I = \int_0^{\pi/4} \ln(2) du - I$.
En déduire la valeur de I .
- (c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = \int_0^{\pi/4} \frac{x dx}{\cos x (\cos x + \sin x)}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$.

- (a) Calculer W_0, W_1 et W_2 .
- (b) Montrer que la suite $(W_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et minorée.
- (c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
- (d) Montrer que $W_{2n} = \frac{(2n)! \pi}{2^{2n+1} (n!)^2}$.
- (e) Montrer que la suite $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$ est constante.
- (f) En déduire une expression de W_{2n+1} .