Semaine 7 - Du 9 au 13 Novembre 2026

Équations différentielles

Équations différentielles linéaires d'ordre 1
Solution de l'équation homogène associée sur un intervalle.
La solution générale est la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène.
Principe de superposition lorsque le second membre est une combinaison linéaire.

Recherche d'une solution particulière de $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$
Solution de la forme $y(t) = Q(t)e^{\beta t}$ lorsque a est constant et $b(t) = P(t)e^{\beta t}$ (admis).
Méthode de Lagrange de la variation de la constante.
Problème de Cauchy : il existe une unique solution satisfaisant une condition initiale.

Équations différentielles linéaires d'ordre 2 **à coefficients constants**
Résolution de l'équation homogène grâce aux racines du polynôme caractéristique.
Expression des solutions réelles sans passage aux complexes.
Principe de superposition lorsque le second membre est une combinaison linéaire.

Recherche d'une solution particulière de $y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = b(t)$
Solution de la forme $y(t) = Q(t)e^{\beta t}$ lorsque $b(t) = P(t)e^{\beta t}$ (admis).
Problème de Cauchy : il existe une unique solution satisfaisant deux conditions initiales.

Liste de questions de cours :

a) Déterminer des primitives de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$.
b) Énoncer et démontrer la formule d'intégration par parties puis calculer $\int_0^x \text{Arctan}\,(t)\ \mathrm{d}t$.
c) Énoncer et démontrer la formule de changement de variables puis calculer $\int_0^x \frac{1}{1+e^t}\ \mathrm{d}t$.
d) Énoncer et démontrer les solutions homogènes d'une EDL1 à coefficients non constants.
e) Énoncer et démontrer le principe de superposition pour l'ordre 1.
f) Énoncer et démontrer les solutions homogènes d'une EDL2 à coefficients constants sur $\mathbb{C}$.

Exercices du TD4 à préparer

1. Equation différentielle d'ordre 1 Exo7
2. Equation différentielle d'ordre 2 Exo8 (6 équations aux choix)

Exercices d'application du cours

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   (a) $y'(t) - 2y(t) = te^t$.
   (b) $ty'(t) - 2y(t) = \frac{t}{t+1}$ pour $t > 0$.
   (c) $y'(t) + \frac{t^2-t}{t^2+t+1}y(t) = te^t$.
2. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   (a) $y'' + 5y' + 6y = e^t \sin(t)$.
   (b) $y'' + 2y' + 5y = te^t$.
   (c) $y'' + 4y' + 4y = \operatorname{ch}(2t)$.

Devoir libre

1. On cherche à résoudre l'équation différentielle non linéaire $y' - y = t\sqrt{y}$.
   On ajoute la condition initiale $y(0) = 1$.
   (a) On pose $z(t) = \sqrt{y(t)}$ lorsque cela est possible.
   Montrer que l'équation s'écrit $2z'(t) - z(t) = t$.
   (b) Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} 2z' - z & = t \\ z(0) = 1 & \end{cases}$.
   (c) Déterminer sur quel intervalle contenant 0 la fonction z est-elle positive.
   (d) En déduire la solution y sur ce domaine maximal.
2. On cherche à résoudre l'équation à coefficients non constants

$$x^2y''(x) + 3xy'(x) - 3y(x) = x^2 + 1.$$

   On ajoute les conditions initiales $y(1) = y'(1) = 0$.
   (a) On pose $t = \ln x$ et $z(t) = y(e^t)$ lorsque cela est possible.
   Montrer que l'équation s'écrit $z''(t) + 2z'(t) - 3z(t) = e^{2t} + 1$.
   (b) Déterminer les conditions initiales en $z(t)$ et résoudre le problème de Cauchy associé.
   (c) En déduire $y(x)$ et préciser sur quel domaine contenant $x = 1$ la solution est valable.