Calcul intégrale

On recherche à calculer $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\ \mathrm{d}x$.

1. Montrer que, pour $x \in [0, \pi/4]$, $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1-\tan x}{1+\tan x}$.
2. Avec le changement de variable $u = \frac{\pi}{4} - x$, montrer que $I = \int_0^{\pi/4} \ln 2\ \mathrm{d}u - I$. En déduire la valeur de I.
3. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x\ \mathrm{d}x}{\cos x(\cos x + \sin x)}$.

1. Pour $x \in [0, \pi/4]$, on utilise la formule de la tangente d'une différence :

$$\tan\left(\tfrac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\tan(\pi/4) - \tan x}{1 + \tan(\pi/4)\tan x} = \frac{1-\tan x}{1+\tan x},$$

car $\tan(\pi/4) = 1$.

2. On pose $u = \frac{\pi}{4} - x$, donc $x = \frac{\pi}{4} - u$ et $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$. Alors

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{\pi/4}^{0} \ln\big(1 + \tan(\tfrac{\pi}{4} - u)\big)(-\mathrm{d}u) \\ &= \int_0^{\pi/4} \ln\big(1 + \tan(\tfrac{\pi}{4} - u)\big)\ \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

D'après la question précédente

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/4} \ln\left(1 + \frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right)\ \mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{2}{1+\tan u}\right)\ \mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\pi/4} \ln 2\ \mathrm{d}u - \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan u)\ \mathrm{d}u \\ &= \frac{\pi}{4}\ln 2 - I. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$2I = \frac{\pi}{4}\ln 2, \qquad \text{donc} \qquad I = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

3. On intègre par parties

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/4} 1 \cdot \ln(1+\tan x)\ \mathrm{d}x \\ &= \Big[x\ln(1+\tan x)\Big]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} x\frac{1}{\cos^2 x}\frac{1}{1+\tan x}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{4}\ln 2 - \int_0^{\pi/4} \frac{x\ \mathrm{d}x}{\cos x(\cos x + \sin x)}. \end{aligned}$$

Comme $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$, on obtient

$$\int_0^{\pi/4} \frac{x\ \mathrm{d}x}{\cos x(\cos x + \sin x)} = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

Intégrale de Wallis

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer W_0, W_1 et W_2.
2. Montrer que la suite $(W_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
4. Montrer que $W_{2n} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$.
5. Montrer que la suite $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$ est constante.
6. En déduire une expression de W_{2n+1}.

1. On a
$$W_0 = [t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_1 = [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = 1.$$
Puis
$$W_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

2. Pour $t \in [0, \pi/2]$, on a $0 \leq \sin t \leq 1$, donc $0 \leq \sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t)$. Par croissance de l'intégrale,
$$0 \leq \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t,$$
c'est-à-dire $0 \leq W_{n+1} \leq W_n$. Ainsi, la suite $(W_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée par 0.

3. On a
$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\sin^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\cos(t)\sin^{n+1}(t)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos t)(n+1)\cos(t)\sin^n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (0-0) + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin^n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(t))\sin^n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}, \end{aligned}$$
par linéarité.

On obtient donc $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

4. On démontre la relation par récurrence simple sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation, pour $n = 0$: $W_0 = \frac{\pi}{2}$, d'après la première question.

Hérédité. D'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence,
$$\begin{aligned} W_{2n+2} &= \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{2^2(n+1)^2} \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2} \\ &= \frac{(2n+2)!\pi}{2^{2n+3}((n+1)!)^2}. \end{aligned}$$

5. On a
$$u_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1} = u_n,$$
donc la suite est constante. Sa constante vaut $u_0 = W_0W_1 = \frac{\pi}{2}$.

6. On obtient

$$(2n+1)W_{2n+1}W_{2n} = \frac{\pi}{2} \quad \text{avec} \quad W_{2n} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}.$$

On en déduit que

$$W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$