Équation différentielle de Bernoulli

On cherche à résoudre l'équation différentielle non linéaire $y' - y = t\sqrt{y}$.
On ajoute la condition initiale $y(0) = 1$.

1. On pose $z(t) = \sqrt{y(t)}$ lorsque cela est possible.
   Montrer que l'équation s'écrit $2z'(t) - z(t) = t$.
2. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} 2z' - z = t \\ z(0) = 1 \end{cases}$.
3. Déterminer sur quel intervalle contenant 0 la fonction z est-elle positive ?
4. En déduire la solution y sur ce domaine maximal.

1. La fonction $z(t) = \sqrt{y(t)}$ est de classe C^1 lorsque $y > 0$.
   On pose $A = y^*(]0, +\infty[) = \{t \in \mathbb{R} \text{ tel que } y(t) > 0\}$. On sait que A est non vide car $y(0) = 1$ donc $0 \in A$.
   Pour $t \in A$, On a $z'(t) = \frac{y'(t)}{2\sqrt{y(t)}} = \frac{y'(t)}{2z(t)}$.
   Donc $y' - y = t\sqrt{y} \Leftrightarrow 2zz' - z^2 = tz \Leftrightarrow 2z'(t) - z(t) = t$, car $z(t) > 0$.
2. On résout l'équation différentielle linéaire du premier ordre $z' = \frac{1}{2}z + \frac{t}{2}$ pour $t \in J$.
   On a $z_h(t) = \lambda e^{t/2}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On recherche une solution particulière sous la forme $z_p(t) = at + b$ (car ici $\beta = 0$).
   On obtient $2a - (at + b) = t$, puis $a = -1$ et $b = -2$, donc $z_p(t) = -t - 2$.
   Ainsi $z(t) = \lambda e^{t/2} - t - 2$ avec la condition $y(0) = 1$ qui donne bien $z(0) = \sqrt{1} = 1$.
   Donc $\lambda - 2 = 1$ puis $\lambda = 3$. Enfin $\boxed{z(t) = 3e^{t/2} - t - 2}$.
3. On étudie la fonction z pour déterminer son signe.
   On a $z'(t) = \frac{3}{2}e^{t/2} - 1$, qui change de signe en $t_0 = 2\ln(2/3) < 0$.
   Or $z(t_0) = 2z'(t_0) - t_0 = -t_0 > 0$. Donc z atteint un minimum global strictement positif en t_0. Ainsi, l'intervalle contenant 0 sur lequel z est positive est $A = \mathbb{R}$.
4. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} y(t) &= z(t)^2 \\ &= (3e^{t/2} - t - 2)^2 \\ &= 9e^t - 6(t+2)e^{t/2} + t^2 + 4t + 4. \end{aligned}$$

   Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et, comme $z > 0$ sur $\mathbb{R}$, elle vérifie l'équation initiale. C'est donc la solution maximale.

Équation de Cauchy-Euler

On cherche à résoudre l'équation à coefficients non constants

$$x^2y''(x) + 3xy'(x) - 3y(x) = x^2 + 1.$$

On ajoute les conditions initiales $y(1) = y'(1) = 0$.

1. On pose $t = \ln x$ et $z(t) = y(e^t)$ lorsque cela est possible.
   Montrer que l'équation s'écrit $z''(t) + 2z'(t) - 3z(t) = e^{2t} + 1$.
2. Déterminer les conditions initiales en $z(t)$ et résoudre le problème de Cauchy associé.
3. En déduire $y(x)$ et préciser sur quel domaine contenant $x = 1$ la solution est valable.

1. Soit $x > 0$. On cherche une fonction y de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $t \mapsto e^t$ est de classe C^∞, la composée $t \mapsto z(t) = y(e^t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

   On a

   $$z'(t) = e^t y'(e^t) = xy'(x) \quad \text{et} \quad z''(t) = e^{2t}y''(e^t) + e^t y'(e^t) = x^2y''(x) + xy'(x).$$

   Ainsi,

   $$\begin{aligned} z''(t) + 2z'(t) - 3z(t) &= \left[x^2y''(x) + xy'(x)\right] + 2xy'(x) - 3y(x) \\ &= x^2y''(x) + 3xy'(x) - 3y(x) \\ &= x^2 + 1 = e^{2t} + 1. \end{aligned}$$

2. Les conditions initiales sont données pour $x = 1$, donc $t = \ln x = 0$. Ainsi, $z(0) = y(1) = 0$ et $z'(0) = 1 \cdot y'(1) = 0$.

   Le polynôme caractéristique de l'EDL2 en z est $X^2 + 2X - 3 = (X - 1)(X + 3)$. Donc les solutions homogènes sont $t \mapsto \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-3t}$ pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

   On cherche une solution particulière de l'équation $z_1'' + 2z_1' - 3z_1 = e^{2t}$ sous la forme $z_1(t) = ae^{2t}$. Comme $\chi(2) = 5$, l'équation donne $5a = 1$, donc $a = \frac{1}{5}$ et $z_1(t) = \frac{1}{5}e^{2t}$.

   On cherche une solution particulière de l'équation $z_2'' + 2z_2' - 3z_2 = 1$ sous la forme $z_2(t) = a$. Comme $\chi(0) = -3$, l'équation donne $-3a = 1$, donc $a = -\frac{1}{3}$ et $z_2(t) = -\frac{1}{3}$.

   Ainsi $z(t) = \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{3}$.

   Puis $z'(t) = \lambda_1 e^t - 3\lambda_2 e^{-3t} + \frac{2}{5}e^{2t}$.

   Les conditions initiales s'écrivent

   $$\begin{cases} z(0) = 0, \\ z'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = 0, \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 + \frac{2}{5} = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_2 = \frac{2}{15}.$$

   Donc $z(t) = \frac{2}{15}e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{3}$.
3. On obtient $y(x) = \frac{2}{15}x^{-3} + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{3}$.

   Donc y est définie sur $\mathbb{R}^*$ mais la résolution est valable uniquement sur l'intervalle $]0, +\infty[$ contenant $x = 1$.