Semaine 8 - Du 16 au 20 Novembre 2026

Equations différentielles

Révision de la semaine 7.

Les nombres réels et Suites numériques

Bornes supérieure et inférieure

Définition et exemple. Notation $\sup(A)$ et $\inf(A)$.
Axiome de $\mathbb{R}$: toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure.
$\sup(A) \in A \Leftrightarrow A$ admet un maximum.
$M = \sup(A)$ ssi M est un majorant de A et il existe une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $a_n \to M$.

Approximations

Partie entière. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
Approximations décimales par défaut ou par excès.

Parties convexes et parties denses de $\mathbb{R}$.

Caractérisation des intervalles comme les convexes de $\mathbb{R}$.
A est dense dans $\mathbb{R}$ ssi pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $a_n \to x$.
$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Liste de Questions de cours :

a) Enoncer et démontrer le principe de superposition pour l'ordre 1.
b) Enoncer et démontrer les solutions homogènes d'une EDL1 à coefficients non constants.
c) Enoncer et démontrer les solutions homogènes d'une EDL2 à coefficients constants sur $\mathbb{C}$.
d) Déterminer les bornes supérieure et inférieure de $A = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \text{ pour } p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$.
e) Montrer que si A est un convexe majoré sans maximum et minoré avec minimum alors $A = [\min A, \sup A[$.
f) Démontrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ à l'aide des approximations décimales.

Exercices du TD5 à préparer

1. Inégalités sur $\mathbb{R}$ Exo1 Exo2
2. Bornes sup/inf Exo3 (Exo4) Exo5
3. Révision sur les suites Exo6

Exercices d'Application du Cours

1. Déterminer les bornes inférieures et supérieures des ensembles suivants :
   (a) $A = \left\{ \dfrac{n^2+1}{2n^2+3} \text{ pour } n \in \mathbb{N} \right\}$.
   (b) $B = \left\{ \frac{3p}{2pq+5} \text{ pour } p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$.
   (c) $C = \left\{ \dfrac{p-q}{p+q} \text{ pour } p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$.
2. Notions dense et convexe.
   (a) Montrer que l'union de deux parties denses est dense.
   (b) Montrer que l'intersection de deux parties convexes est convexe.
   (c) Trouver des contre-exemples pour l'intersection de parties denses qui ne serait pas dense et l'union de parties convexes qui ne serait pas convexe.

Devoir libre

1. Le but du problème est de montrer que $A = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que A est un ensemble stable par addition, soustraction et multiplication. Rmq : On dit que A est un anneau.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = (\sqrt{2}-1)^n$.
   Montrer que $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de A strictement positifs qui tend vers 0.
   (c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = a_n \lfloor x/a_n \rfloor$.
   Montrer que $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de A qui tend vers x.
2. On considère deux parties A et B non vides et bornées de $\mathbb{R}$.
   Montrer les formules suivantes :
   (a) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ et $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.
   (b) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ et $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.
   (c) $\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B)$ et $\inf(A - B) = \inf(A) - \sup(B)$.
   (d) $\sup(A.B) = \max(\sup A. \sup B, \inf A. \inf B)$.