Devoir Surveillé de Mathématiques n° 2
le samedi 10 octobre 2026 – durée 3h

Les questions des exercices sont indépendantes.

Exercice 1 : Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a. $z^2 - (1+2i)z + 3(1+i) = 0$
b. $z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 17 = 0$
c. $(z^2+1)^4 = (z^2-1)^4$
d. $2\exp(2z) + (3 - i\sqrt{3})\exp(z) + (1 - i\sqrt{3}) = 0$

Exercice 2 : Pour chacune des fonctions suivantes, montrer qu'elle réalise une bijection et déterminer sa réciproque :

1. $f : [2, +\infty[\to [-3, +\infty[$ définie par $f(t) = t^2 - 4t + 1$.
2. $g : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C} \setminus \{1\}$ définie par $g(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$.
3. $h : [0,1] \to [0,1]$ définie par $h(t) = \dfrac{2t}{t^2+1}$.

Problème I : On considère $R : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ la rotation de centre $A(1,1)$ et d'angle $\pi/2$.
On note $H : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ l'homothétie de centre $B(-1,2)$ et de rapport 2.

1. Déterminer les applications $r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ associées à R et H.
2. Montrer que ce sont des bijections et calculer r^{-1} et h^{-1}.
3. On définit les composées $f = r \circ h \circ r^{-1}$ et $g = h \circ r \circ h^{-1}$.
   Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = 2z + i$ et $g(z) = iz + 3 - 3i$.
4. Caractériser géométriquement les transformations associées à f et g.

Problème II : Soit $p, q \in \mathbb{C}^*$ des paramètres complexes non nuls.
On cherche à résoudre l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante :

$$(E) : z^3 + pz + q = 0.$$

On considère également l'équation (R) d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$:

$$(R) : Z^2 + qZ - \frac{p^3}{27} = 0.$$

On note U et V les racines complexes de (R). Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $u^3 = U$.

1. (a) Montrer que $u \neq 0$. On pose alors $v = \dfrac{-p}{3u}$.
   (b) Calculer $u^3 v^3$. En déduire que $v^3 = V$.
   (c) En déduire la valeur de $u^3 + v^3$.
2. (a) Montrer que $z_1 = u + v$ est solution de (E).
   (b) Montrer que $z_2 = ju + j^2 v$ et $z_3 = j^2 u + jv$ sont également solutions de (E).
3. On traite dans cette question le cas $p = -3$ et $q = 1$.
   (a) Calculer U et V puis u et v.
   (b) En déduire les trois solutions réelles de l'équation $z^3 - 3z + 1 = 0$ et les calculer à l'aide de $\cos(k\pi/9)$ pour des valeurs de $k \in \mathbb{Z}$.
4. On traite dans cette question le cas $p = q = -1$.
   (a) Calculer U et V puis u et v.
   (b) En déduire l'équation $z^3 - z - 1 = 0$ admet une unique solution réelle et la calculer à l'aide de radicaux.