DS de Mathématiques n° 2 – Corrigé

Exercice 1 : a. *Résoudre l'équation* $z^2-(1+2i)z+3(1+i)=0$

Le discriminant du polynôme du 2nd degré est :

$$\Delta=(1+2i)^2-4\times 3(1+i)=-15-8i.$$

On cherche $\delta=a+ib$ tel que $\delta^2=\Delta$. Il vérifie le système :

$$\begin{cases} a^2-b^2 &= -15\\ 2ab &= -8\\ a^2+b^2 &= \sqrt{225+64}=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 &= 1\\ b^2 &= 16\\ ab &= -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| &= 1\\ |b| &= 4\\ ab &< 0 \end{cases}$$

On obtient $\delta=1-4i$ ou $\delta=-1+4i$.

Puis les solutions sont $\dfrac{(1+2i)+(1-4i)}{2}=1-i$ et $\dfrac{(1+2i)-(1-4i)}{2}=3i$.

Donc l'ensemble des solutions est $\{1-i;3i\}$.

b. *Résoudre l'équation* $z^4+4z^3+6z^2+4z+17=0$

Soit $z\in\mathbb{C}$. On reconnaît la formule du binôme de Newton :

$$(z+1)^4=z^4+4z^3+6z^2+4z+1$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} &z^4+4z^3+6z^2+4z+17=0\\ &\Leftrightarrow (z+1)^4+16=0\\ &\Leftrightarrow (z+1)^4=-16=16e^{i\pi}\\ &\Leftrightarrow \exists\omega\in\mathbb{U}_4, z+1=\omega 2e^{i\pi/4}\\ &\Leftrightarrow \exists k\in[\![0,3]\!], z=2e^{i\pi/4+2ik\pi/4}-1. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{2e^{i\pi/4}-1;2e^{3i\pi/4}-1;2e^{5i\pi/4}-1;2e^{7i\pi/4}-1\}$.

On peut écrire sous forme algébrique :

$$\left\{\sqrt{2}-1+i\sqrt{2};-\sqrt{2}-1+i\sqrt{2};-\sqrt{2}-1-i\sqrt{2};\sqrt{2}-1-i\sqrt{2}\right\}$$

c. *Résoudre l'équation* $(z^2+1)^4=(z^2-1)^4$

Soit $z\in\mathbb{C}-\{1;-1\}$.

On a $(z^2+1)^4=(z^2-1)^4$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{z^2+1}{z^2-1}\right)^4=1$ car $z^2\neq 1$.

$\Leftrightarrow \exists\omega\in\mathbb{U}_4, \dfrac{z^2+1}{z^2-1}=\omega$

$\Leftrightarrow \exists\omega\in\mathbb{U}_4, z^2+1=\omega(z^2-1)$

$\Leftrightarrow \exists\omega\in\mathbb{U}_4-\{1\}, z^2=\dfrac{\omega+1}{\omega-1}$ car $\omega\neq 1$ ($z^2+1=z^2-1$ est absurde).

$\Leftrightarrow z^2=\dfrac{-1+1}{-1-1}=0(\omega=-1)$ ou $z^2=\dfrac{i+1}{i-1}=e^{-i\pi/2}(\omega=i)$ ou $z^2=\dfrac{-i+1}{-i-1}=e^{i\pi/2}(\omega=-i)$

$\Leftrightarrow z=0$ ou $z\in\{e^{-i\pi/4};e^{3i\pi/4}\}$ ou $z\in\{e^{i\pi/4};e^{-3i\pi/4}\}$

Donc l'ensemble des solutions est $\{0;e^{i\pi/4};e^{-i\pi/4};e^{3i\pi/4};e^{-3i\pi/4}\}$.

d. *Résoudre l'équation* $2\exp(2z)+(3-i\sqrt{3})\exp(z)+(1-i\sqrt{3})=0$

Soit $z\in\mathbb{C}$. On note $w=\exp(z)$.

On résout l'équation du 2nd degré $2w^2+(3-i\sqrt{3})w+(1-i\sqrt{3})=0$.

Le discriminant $\Delta = (3-i\sqrt{3})^2 - 4\times 2(1-i\sqrt{3}) = -2+2i\sqrt{3} = 4e^{2i\pi/3}$.
Donc $\delta = 2e^{\pi/3} = 1+i\sqrt{3}$ convient.
Puis $w = \dfrac{-(3-i\sqrt{3})+(1+i\sqrt{3})}{2\times 2} = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ou $w = \dfrac{-(3-i\sqrt{3})-(1+i\sqrt{3})}{2\times 2} = -1$.
Donc $e^z = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{2i\pi/3} \Leftrightarrow z \in \{2i\pi/3\} + 2i\pi\mathbb{Z}$
ou $e^z = -1 = e^{i\pi} \Leftrightarrow z \in \{i\pi\} + 2i\pi\mathbb{Z}$
Donc l'ensemble des solutions est $\{2i\pi/3; i\pi\} + 2i\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 2 : *Pour chacune des fonctions suivantes, montrer qu'elle réalise une bijection et déterminer sa réciproque :*

1. $f : [2,+\infty[\to [-3,+\infty[$ *définie par* $f(t) = t^2 - 4t + 1$.
   La fonction f est dérivable sur $[2,+\infty[$ et $f'(t) = 2t-4 > 0$ pour tout $t > 2$. Donc f est strictement croissante et continue sur $[2,+\infty[$.
   De plus $\lim\limits_{t\to 2^+} f(t) = -3$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$.
   Donc f réalise une bijection de $[2,+\infty[$ vers $[-3,+\infty[$.
   Soit $y \in [-3,+\infty[$. On cherche $x \in [2,+\infty[$ tel que $f(x) = y$.
   On a : $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = y \Leftrightarrow x^2 - 4x + (1-y) = 0$
   $\Leftrightarrow x \in \{2+\sqrt{y+3}; 2-\sqrt{y+3}\}$ car $\Delta = 16 - 4(1-y) = 4(y+3)$.
   $\Leftrightarrow x = 2+\sqrt{y+3}$ car $x \geq 2$.
   Donc la réciproque $f^{-1} : [-3,+\infty[\to [2,+\infty[$ est définie par $f^{-1}(t) = 2+\sqrt{t+3}$.
2. $g : \mathbb{C}\setminus\{i\} \to \mathbb{C}\setminus\{1\}$ *définie par* $g(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$.
   Soit $u \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$. On cherche $z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$ tel que $g(z) = u$.
   On a : $g(z) = u \Leftrightarrow z+i = u(z-i) \Leftrightarrow z+i = uz - ui \Leftrightarrow z - uz = -i - ui$
   $\Leftrightarrow z(1-u) = -i(1+u) \Leftrightarrow z = \dfrac{i(u+1)}{u-1}$.
   Donc la fonction g est bijective et sa réciproque $g^{-1} : \mathbb{C}\setminus\{1\} \to \mathbb{C}\setminus\{i\}$ est définie par $g^{-1}(z) = i\dfrac{(z+1)}{z-1}$.
3. $h : [0,1] \to [0,1]$ *définie par* $h(t) = \dfrac{2t}{t^2+1}$.
   La fonction h est dérivable sur $[0,1]$ et $h'(t) = \dfrac{2(1-t^2)}{(t^2+1)^2} > 0$ pour tout $t \in [0,1[$. Donc h est strictement croissante et continue sur $[0,1]$ avec $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$.
   Donc h réalise une bijection de $[0,1]$ vers $[0,1]$.
   Soit $y \in]0,1]$. On cherche $x \in]0,1]$ tel que $h(x) = y$.
   On a : $h(x) = y \Leftrightarrow 2x = y(x^2+1) \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0$
   $\Leftrightarrow x \in \left\{\dfrac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}; \dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}\right\}$ car $\Delta = 4 - 4y^2 = 4(1-y^2)$.
   $\Leftrightarrow x = \dfrac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ car $x \in]0,1]$.
   La méthode ne fonctionne pas pour $y = 0$. Mais on a $h(0) = 0$ donc $h^{-1}(0) = 0$.
   Donc la réciproque $h^{-1} : [0,1] \to [0,1]$ est définie par $h^{-1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0, \\ \dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t} & \text{si } t \in]0,1]. \end{cases}$

Problème I : *On considère $R : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ la rotation de centre $A(1,1)$ et d'angle $\pi/2$.*
On note $H : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ l'homothétie de centre $B(-1,2)$ et de rapport 2.

Déterminer les applications $r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ associées à R et H.

On applique les formules du cours. Soit $z \in \mathbb{C}$.

On a $r(z) = e^{i\pi/2}(z-(1+i))+(1+i) = i(z-1-i)+1+i = iz+2$.
Et $h(z) = 2(z-(-1+2i))+(-1+2i) = 2z+1-2i$.

2. *Montrer que ce sont des bijections et calculer r^{-1} et h^{-1}.*
La réciproque de R est la rotation d'angle $-\pi/2$ de même centre.
Ainsi $r^{-1}(z) = -i(z-(1+i))+(1+i) = -iz+2i$.
La réciproque de H est l'homothétie de rapport $1/2$ de même centre.
Donc $h^{-1}(z) = \dfrac{1}{2}(z-(-1+2i))+(-1+2i) = \dfrac{1}{2}z - \dfrac{1}{2} + i$.

3. *Calculer les composées $f = r\circ h\circ r^{-1}$ et $g = h\circ r\circ h^{-1}$.*
Par le calcul, on trouve $f(z) = r(h(r^{-1}(z))) = 2z+i$
et $g(z) = h(r(h^{-1}(z))) = iz+3-3i$.

4. *Caractériser géométriquement les transformations associées à f et g.*
Soit $z\in\mathbb{C}$. On recherche les points fixes.
On a : $f(z) = z \Leftrightarrow 2z+i = z \Leftrightarrow z = -i$.
Et : $g(z) = z \Leftrightarrow iz+3-3i = z \Leftrightarrow z = \dfrac{3-3i}{1-i} = 3$.
Donc f est associée à l'homothétie de rapport 2 et de centre $C(0,-1)$.
Et g est associée à la rotation d'angle $\pi/2$ et de centre $D(3,0)$.

Problème II : *Soit $p,q\in\mathbb{C}^*$ des paramètres complexes non nuls.*

On cherche à résoudre l'équation $(E): z^3+pz+q=0$.

On considère l'équation $(R): Z^2+qZ-\dfrac{p^3}{27}=0$.

On note U et V les racines complexes de (R). Soit $u\in\mathbb{C}$ tel que $u^3=U$.

1. (a) *Montrer que $u\neq 0$.*
On raisonne par l'absurde en supposant $u=0$. On en déduit que $U=u^3=0$ est solution de (R). Puis que $0^2+q\times 0-\dfrac{p^3}{27}=0$ i.e. $p^3=0$ donc $p=0$. Absurde car l'énoncé suppose p non nul.

   (b) *On pose $v=\dfrac{-p}{3u}$. Calculer u^3v^3. En déduire que $v^3=V$.*
On a $u^3v^3 = u^3\left(\dfrac{-p}{3u}\right)^3 = \dfrac{-p^3}{27}$.

Or on sait que U et V sont les racines de $X^2+qX-\dfrac{p^3}{27}$. Donc on a également $UV=\dfrac{-p^3}{27}$. On en déduit que $u^3v^3=UV$ avec $u^3=U\neq 0$. Donc $v^3=V$.

   (c) *En déduire la valeur de u^3+v^3.*
On a $u^3+v^3 = U+V = -q$ la somme des racines de $X^2+qX-\dfrac{p^3}{27}$.

2. (a) *Montrer que $z_1=u+v$ est solution de (E).*
On teste le candidat $z_1=u+v$ dans l'équation (E). On a :

$$\begin{aligned}(u+v)^3+p(u+v)+q &= u^3+3u^2v+3uv^2+p(u+v)+q\\ &= (u^3+v^3)+3uv(u+v)+p(u+v)+q\\ &= -q-p(u+v)+p(u+v)+q\\ &= 0 \text{ car } u^3+v^3=-q \text{ et } 3uv=-p.\end{aligned}$$

   (b) *Montrer que $z_2=ju+j^2v$ et $z_3=j^2u+jv$ sont également solutions de (E).*
Deux méthodes : on peut tester directement z_2 et z_3 et on utilise la relation $j^3=1$.

On peut adapter le résultat précédent : On note $u' = ju$. Il vérifie $(u')^3 = U$ donc ce qui précède s'applique avec $v' = \dfrac{-p}{3u'} = \dfrac{-p}{3ju} = j^2 v$. Ainsi d'après 2.a. $ju + j^2 v = u' + v'$ est racine de (E).

De même avec $u'' = j^2 u$ on trouve $v'' = jv$ et donc $j^2 u + jv$ est solution de (E).

3. (a) *On traite le cas $p = -3$ et $q = 1$. Calculer U et V puis u et v.*

L'équation (R) est $Z^2 + Z - \dfrac{(-3)^3}{27} = Z^2 + Z + 1 = 0$. Donc les racines sont $U = j = \exp(2i\pi/3)$ et $V = j^2$.

Puis $u = \exp(2i\pi/9)$ est une racine cubique de U i.e. vérifie $u^3 = U$.

Enfin $v = \dfrac{-p}{3u} = \exp(-2i\pi/9)$.

(b) *En déduire les trois solutions réelles de l'équation $z^3 - 3z + 1 = 0$ et les calculer à l'aide de $\cos(k\pi/9)$ pour des valeurs de $k \in \mathbb{Z}$.*

Les trois solutions complexes sont $z_1 = u + v = \exp(2i\pi/9) + \exp(-2i\pi/9) = 2\cos(2\pi/9)$,

$z_2 = ju + j^2 v = \exp(2i(\pi/3 + \pi/9)) + \exp(2i(-\pi/3 - \pi/9)) = 2\cos(8\pi/9)$

et $z_3 = j^2 u + jv = \exp(2i(-\pi/3 + \pi/9)) + \exp(2i(\pi/3 - \pi/9)) = 2\cos(4\pi/9)$.

En particulier, les trois solutions sont réelles.

4. *On traite dans cette question le cas $p = q = -1$.*

(a) *Calculer U et V puis u et v.*

L'équation (R) est $Z^2 - Z - \dfrac{(-1)^3}{27} = Z^2 - Z + \dfrac{1}{27} = 0$. Le discriminant de l'équation est $\Delta = 1 - \dfrac{4}{27} = \dfrac{23}{27}$.

Donc les racines sont $U = \dfrac{1 + \sqrt{23/27}}{2}$ et $V = \dfrac{1 - \sqrt{23/27}}{2}$.

Puis $u = \sqrt[3]{\dfrac{1 + \sqrt{23/27}}{2}}$ est une racine cubique de U.

Enfin $v = \sqrt[3]{\dfrac{1 - \sqrt{23/27}}{2}}$ car on vérifie que $uv = \dfrac{1}{3} = -p/3$.

(b) *En déduire que l'équation $z^3 - z - 1 = 0$ admet une unique solution réelle et la calculer à l'aide de radicaux.*

La solution réelle est $z_1 = u + v = \sqrt[3]{\dfrac{1 + \sqrt{23/27}}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{1 - \sqrt{23/27}}{2}} \in \mathbb{R}$.

Deux méthodes pour démontrer que c'est la seule. On peut calculer z_2 et z_3 et montrer qu'ils ne sont pas réelles i.e. $\mathrm{Im}(z_2) = -\mathrm{Im}(z_3) \neq 0$.

On peut également étudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - x - 1$. Elle est dérivable et $f'(x) = 3x^2 - 1$. Elle change de variation en $\pm\sqrt{1/3} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Or $f(\dfrac{\sqrt{3}}{3}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{27} - \dfrac{\sqrt{3}}{3} - 1 = -\dfrac{2\sqrt{3}}{9} - 1 < 0$,

$f(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{27} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} - 1 = \dfrac{2\sqrt{3}}{9} - 1 < \dfrac{4}{9} - 1 < 0$,

$\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule sur $\mathbb{R}$ une unique fois (entre $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $+\infty$).