Devoir Surveillé de Mathématiques n° 3
le samedi 14 novembre 2026 – durée 3h

Exercice 1 : Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{t^3}{t^2-4t+5}\,\mathrm{d}t$.

b) $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch} t}$ avec le changement de variable $u = e^t$.

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$ avec le changement de variable $u = \tan\theta$.

Exercice 2 : Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

a) $\begin{cases}(1-t^2)y'(t)+(1+t^2)y(t) = e^t, \quad t \in]-1,1[,\\ y(0)=1.\end{cases}$

b) $\begin{cases}y''(t)+3y'(t)+2y(t) = \sin(t), \quad t\in\mathbb{R},\\ y(0)=y'(0)=0.\end{cases}$

Problème I : Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère $f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}\right)$ lorsque cela est possible.

1. Calculer $f(n\pi)$ pour $n \in \mathbb{Z}$ en fonction de la parité de n.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et paire.
3. Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.
4. Montrer que $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{|x|}{2}$ pour $x \in [-\pi,\pi]$.
5. Tracer la courbe représentative de $y = f(x)$ pour $x \in [-3\pi, 5\pi]$.

Problème II : On considère le problème de Cauchy

$$(\mathcal{C}) : \begin{cases}(\mathcal{E}) : y^{(3)}(t) - y(t) = \sin(t), & t\in\mathbb{R},\\ y(0)=1, \quad y'(0)=3, \quad y''(0)=4.\end{cases}$$

On considère également l'équation différentielle

$$(\mathcal{R}) : z''(t)+3z'(t)+3z(t) = e^{-t}\sin(t).$$

1. Montrer qu'il existe un unique réel $r \in \mathbb{R}$ tel que $y_h(t) = e^{rt}$ soit une solution de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$. Déterminer r.
2. On cherche les solutions de $(\mathcal{E})$ sous la forme $y(t) = K(t)y_h(t)$, où K est de classe C^3. Montrer que y est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si K' est solution de $(\mathcal{R})$.
3. Déterminer l'ensemble des solutions de $(\mathcal{R})$.
4. Montrer que $K(0)=1$, $K'(0)=2$ et $K''(0)=-1$.
5. En déduire $K'(t)$.
6. Résoudre le problème de Cauchy $(\mathcal{C})$.